یک درس مقدماتی در هندسه فضاهای خمیده

وحیدکریمی پور_ دانشکده فیزیک _ دانشگاه صنعتی شریف

۲۹ اردیبهشت ۱۴۰۱

۱ مقدمه

نسبیت عام از یک اصل فیزیکی به نام اصل هم ارزی که خود ناشی از یک مشاهده ساده و شهودی در باره گرانش است آغاز می شود ولی برای فرمول بندی نهایی آن می بایست از چارچوب هندسه نا اقلیدسی استفاده کنیم. به همین جهت در این درس این پیش نیاز یعنی مفاهیم مقدماتی هندسه فضاهای خمیده را معرفی می کنیم. طبیعتا این معرفی مقدماتی است اما تقریبا همه مفاهیم مورد نیاز نسبیت عام را در بر دارد. خواننده ای که بخواهد هندسه فضاهای خمیده را بیشتر از این یاد بگیرد می بایست به کتابهای هندسه دیفرانسیل رجوع کند. در معرفی هندسه دیفرانسیل از یک سطح دو بعدی که در فضای سه بعدی غوطه ور شده است شروع کرده ایم. هر آنچه که برای سطوح دوبعدی یاد می گیریم به سادگی و تنها با افزایش تعداد مختصه ها از دو به تعداد دلخواه برای خمینه های چندبعدی نیز معتبر است. به یک نکته مهم باید توجه کنیم. این دیدگاه برای یادگیری هندسه سطوح که آن را دیدگاه غیرذاتی می نامیم، ساده و شهودی است. در این دیدگاه خواص سطح از دید ناظری که بیرون از سطح و در فضای دکارتی بزرگ است بررسی می شود. ولی دیدگاه دیگری نیز وجود دارد که آن را دیدگاه ذاتی می نامیم. در این دیدگاه خواص هندسی سطح از دید ناظری بررسی می شود که در داخل خود سطح قرار دارد و خبری از فضای بیرونی ندارد. این دیدگاه در ضمیمه این درس توضیح داده شده است.

۲ مروری بر هندسه نااقلیدسی

هندسه اقلیدسی که ادراک شهودی ما را از فضا صورت بندی می کند در قرن چهارم قبل از میلادی توسط اقلیدس به طور کامل تدوین شد. این هندسه که از مفاهیم غیرقابل تعریف مثل نقطه و خط آغاز می کند بر پنج اصل موضوعه استوار است. بنابر تعریف این اصول را نمی توان ثابت کرد، اما بقیه قضایای هندسه را می توان با استدلال دقیق از آنها نتیجه گرفت. این اصول عبارت اند از:

اصل اول ـ از هر نقطه می توان خط مستقیمی به هر نقطه ی دیگر کشید.

اصل دوم ـ هر پاره خط مستقیم را می توان روی همان خط به طور نامحدود امتداد داد.

اصل سوم ـ می توان دایره ای با هر نقطه دلخواه به عنوان مرکز آن و با شعاعی مساوی هر پاره خط رسم کرد.

اصل چهارم ـ همه ی زوایای قائمه با هم مساوی اند.

اصل پنجم ـ از یک نقطه خارج یک خط، یک خط و و تنها یک خط می توان موازی با خط مفروض رسم کرد.

به مدت بیش از دو هزار سال فکر می شد که اصل پنجم واقعا یک اصل موضوع نیست بلکه قضیه ای است که می توان با استدلال آن را از بقیه اصول استنتاج کرد. اما تمامی این تلاش ها چیزی نبود جز جایگزین کردن اصل پنجم با اصلی که به صورت پنهان با آن معادل است. از جمله کسانی که سعی در اثبات اصل پنجم اقلیدس کرده و ناکام مانده اند می توان از پروکلس [۱] ، ابن هیثم [۲] ، عمر خیام [۳] ، خواجه نصیرالدین طوسی [۴] ، جیرالومو ساکری [۵] ، جیوردانو ویتاله [۶] ، و جان لامبرت [۷] نام برد. سرانجام برای اولین جانوس بولیایی [۸] در ۱۸۲۳، و سپس مستقل از او لباچفسکی [۹] در ۱۸۲۹، توانستند دو نوع خاص از هندسه هایی ابداع کنند که در آنها اصل پنجم برقرار نبود. در دو بعد هندسه اقلیدسی هندسه روی یک سطح صاف را توصیف می کند و حال آنکه هندسه بولیایی که به هندسه بیضوی نیز معروف است، هندسه ای برای نقاط و خطوط روی یک کره است. در این هندسه، خطوط قسمت هایی از دایره های عظیمه هستند و از هر نقطه بیرون یک خط نمی توان هیچ خطی رسم کرد که با آن موازی باشد (آن را قطع نکند). هندسه لباچفسکی، را به بهترین صورت می توان با توجه به شکل (۲) فهمید. در این محیط دایره بی نهایت را

[۱] Proclus (410-485 AD)
[۲] Ibn al-Heytham (965-1039)
[۳] Omar Khayyam (1050-1123)
[۴] Nasir al-Din Tusi (1201-1274)
[۵] Girolamo Saccheri (1667-1733)
[۶] Giordano Vitale (1633-1711)
[۷] John Lambert (1728-1777)
[۸] Janos Bolyai
[۹] Nicolai Lobachevsky

نشان می دهد و خطوط راست کمان هایی از دایره هستند که با زاویه قائمه دایره بیرونی را قطع می کنند. همانطور که دیده می شود، از یک نقطه خارج یک خط راست، بی نهایت خط موازی با آن می توان رسم کرد. یک مدل دیگر برای هندسه لباچفسکی در دوبعد روابط خطوط و نقاط روی یک یک سطح زین مانند است. سرانجام گاووس و بیشتر از او ریمان بودند که شکل نهایی و کلی هندسه غیر اقلیدسی را در هر بعدی به شکلی که امروزه می بینیم تدوین کردند. امروزه می دانیم که آنچه که بولیایی ابداع کرده هندسه یک سطح با انحنای ثابت (یکنواخت) و مثبت و آنچه که لباچفسکی ابداع کرده هندسه یک سطح با انحنای ثابت منفی بوده است. هندسه ریمانی، هندسه فضاهایی است با بعد دلخواه و انحنایی که دیگر ثابت و یکنواخت هم نیست و نقطه به نقطه می تواند تغییر کند. در این درس ما به یک توصیف کاملا شهودی از هندسه ریمانی اکتفا می کنیم. برای سادگی هم از توصیف یک سطح خمیده دوبعدی آغاز می کنیم که تصور آن برای همه ما آسان است. پس از فهم هندسه این سطوح می توان به صورت انتزاعی هر آنچه را که آموخته ایم به بعد دلخواه تعمیم داد. هم چنین به یک نکته مهم باید اشاره کنیم. برای توصیف هندسه یک سطح یا در حالت کلی یک خمینه [10] دو راه وجود دارد. راه اول آن است که این سطح را در یک فضای بزرگ تر دکارتی غوطه ور کنیم یا به اصطلاح ریاضی بنشانیم [11]. این دیدگاه که به آن دیدگاه غیرذاتی [12] می گویند، از نظر شهودی ساده و ملموس است چرا که ما با فضای دکارتی آشنا هستیم و خمیدگی سطوح را نیز به همین گونه درک می کنیم. دیدگاه دیگر این است که هندسه سطح را بدون توجه به نحوه نشاندن آن سطح در فضا و تنها از دید موجودات خیالی ای که روی آن سطح زندگی می کنند بررسی کنیم. این دیدگاه را دیدگاه ذاتی [13] می نامند و اهمیت اش این است که هندسه سطح را بدون هیچ نوع ارجاعی به نحوه نشاندن آن سطح در یک فضای بیرونی و بزرگتر بررسی می کند. ما بررسی خود را با دیدگاه غیرذاتی آغاز می کنیم و در ضمیمه دیدگاه ذاتی را نیز شرح می دهیم.

۳ مختصات موضعی برای یک سطح یا خمینه

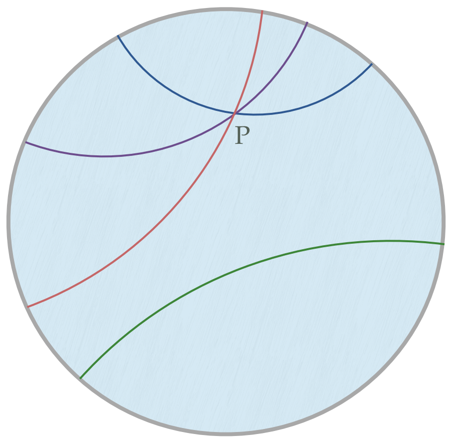
کار خود را با شناسایی یک سطح خمیده دو بعدی شروع می کنیم که در فضای سه بعدی قرار گرفته است. هر آنچه که با مطالعه این سطح دلخواه یاد بگیریم به راحتی به فضاهای خمیده چندبعدی نیز تعمیم پیدا می کند. این کار را در تمرین های همین بخش می توانید انجام دهید. کره

[10] Manifold

[11] embedding

[12] extrinsic

[13] intrinsic



شکل ۱: یک مدل از هندسه لباچفسکی موسوم به هندسه هذلولی. خواننده می تواند تحقیق کند که در این نوع هندسه چهار اصل اول اقلیدس برقرارند ولی اصل پنجم وجود ندارد. شکل سمت راست نشان می دهد که مجموعه زوایای مثلث ها در این هندسه کمتر یا مساوی با ۱۸۰ درجه است.

دوبعدی را در نظر بگیرید: هر نقطه از کره با دو مختصه (θ,ϕ) مشخص می شود. روابط زیر سطح این کره را مشخص می کنند:

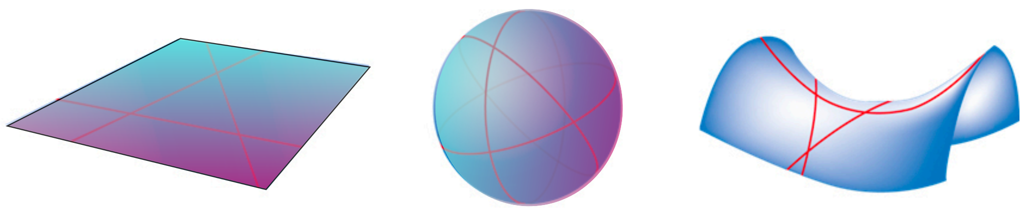
$$x=\sin\theta\cos\phi,\quad y=\sin\theta\sin\phi,\quad z=\cos\theta, \tag{۱}$$

یا

$$\mathbf{r}=(\sin\theta\cos\phi,\sin\theta\sin\phi,\cos\theta). \tag{۲}$$

به همین شکل یک سطح دو بعدی دلخواه با معادلات زیر توصیف می شود:

$$\begin{aligned} x &= x(u^1,u^2)\\ y &= y(u^1,u^2)\\ z &= z(u^1,u^2). \end{aligned} \tag{۳}$$



هندسه غیر اقلیدسی (هذلولی)،
انحنای یکنواخت و منفی،
مجموع زوایای هر مثلث کمتر از ۱۸۰ درجه است.

هندسه غیر اقلیدسی (بیضوی)،
انحنای یکنواخت و مثبت،
مجموع زوایای هر مثلث بیش از ۱۸۰ درجه است.

هندسه اقلیدسی،
انحنای صفر،
مجموع زوایای هر مثلث ۱۸۰ درجه است.

شکل ۲: مقایسه مدلهایی از هندسه های اقلیدسی، بولیایی و لباچفسکی. این دو هندسه نااقلیدسی مدل های خاصی از هندسه نااقلیدسی هستند که در آنها انحنا در همه جا مقدار ثابت و یکنواختی دارد.

هر نقطه از سطح با جفت مختصه ی (u^1, u^2) توصیف می شوند. همین امر نشان می دهد که سطح دو بعدی است و نه مثلا سه بعدی یا چهار بعدی. به عنوان مثالی دیگر هر گاه منحنی $z = f(x)$ را حول محور z دوران دهیم، یک سطح دوار پدید می آید که مختصات موضعی آن برابرند با (r, ϕ) و معادلات توصیف کننده سطح دوار عبارت اند از:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\phi \\ y &= r\sin\phi \\ z &= f(r). \end{aligned} \qquad (۴)$$

مختصات دوبعدی ای که برای توصیف نقاط روی سطح به کار می بریم یکتا نیستند. از نظر شهودی این نکته بدیهی است زیرا هر کدام از افرادی که روی سطح زندگی می کنند می توانند در همسایکی خود مختصات متفاوتی برای مشخص کردن نقاط به کار ببرند. به عنوان مثال برای سطح کره دوبعدی ای که در ابتدا معرفی کردیم فرد دیگری می تواند مختصات زیر را به کار ببرد:

$$x = \cos\theta'\sin\phi', \qquad y = \cos\theta'\cos\phi', \qquad z = \sin\theta'. \qquad (۵)$$

بنابراین یک نقطه روی سطح کره را هم می توان با مختصات (θ, ϕ) و هم با مختصات (θ', ϕ') مشخص کرد.

شکل ۳: نیکلای ایوانویچ لباچفسکی (۱۷۹۲ـ۱۸۵۶)، ریاضیدان لهستانی تبار روس، که بیشتر به خاطر ابداع هندسه نااقلیدسی (هندسه هذلولی) معروف است. وی در دانشگاه قازان (Kazan) تحصیل و تدریس کرد. در همان جا ازدواج کرد و صاحب هجده فرزند شد که فقط هفت تای آنها زنده ماندند و سرانجام در بیماری و نابینایی و فقر درگذشت. او توانست نشان دهد که می توان هندسه ای سازگار چنان ساخت که در آن اصل پنجم اقلیدس برقرار نباشد. در هندسه لباچفسکی یا هندسه هذلولی از یک نقطه خارج از یک خط می توان بی نهایت خط راست چنان رسم کرد که همه با آن خط موازی باشند.

- **تمرین:** در مثال کره دو بعدی رابطه بین دو نوع مختصاتِ (θ,ϕ) و (θ',ϕ') را تعیین کنید.

- **تمرین: مختصات استریوگرافیک برای کره.** مطابق شکل (۶) می توان از قطب شمال به هر نقطه از کره خطی رسم کرد و آن را امتداد داد تا صفحه ای را که از قطب جنوب می گذرد در یک نقطه قطع کند. مختصات (X_N,Y_N) این نقطه در صفحه را می توان به عنوان مختصات آن نقطه از کره در نظر گرفت. این مختصات را مختصات استریوگرافیک می نامیم.

  الف ـ مختصات استریوگرافیک یک نقطه از کره با مختصه (θ,ϕ) را پیدا کنید. شعاع کره را 1 بگیرید.

  ب ـ کدام نقطه از کره است که مختصه استریوگرافیک ندارد و برایش تعریف نشده است؟

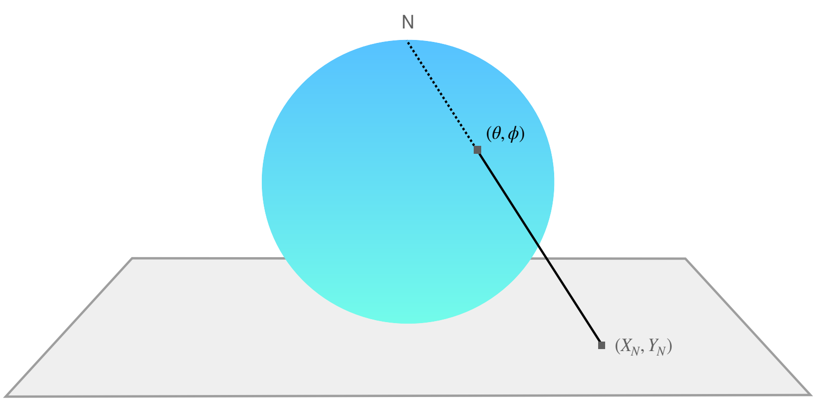
شکل ۴: کارل فردریک گاووس (۱۷۷۷ـ۱۸۵۵)، ریاضیدان و فیزیکدان آلمانی سهم عمده ای در گسترش بسیاری از رشته های ریاضی داشت. از او به عنوان شهزاده ریاضیدانان و یا بزرگترین ریاضیدان بعد از عهد باستان نیز یاد می شود. اولین رساله او که در سن بیست و یک سالگی منتشر شده، نظریه اعداد را به عنوان یک رشته در ریاضیات تثبیت کرده است. با توجه به مکاتباتی که از گاووس بدست آمده، عده ای از مورخان علم بر این نظرند که گاووس مدتها قبل از دیگران به امکان تدوین هندسه های غیراقلیدسی پی برده ولی از ترس وارد شدن در مجادله های بی حاصل آن را منتشر نکرده است.

پـ می توانیم همین کار را با گذراندن خطوط از قطب جنوب انجام دهیم تا خطوطی که رسم می کنیم صفحه گذرنده از قطب شمال را قطع کنند. در این صورت به هر نقطه از کره می توانیم مختصه (X_S, Y_S) را نسبت دهیم. قسمت های الف و ب را برای این نوع مختصات پاسخ دهید.

تـ در آن قسمت از کره که شامل قطب شمال و قطب جنوب نیست، هر نقطه دو نوع مختصه دارد که عبارت اند از: (X_N, Y_N) و (X_S, Y_S). این دو نوع مختصه را بر حسب یکدیگر بنویسید.

شکل ۵: گئورگ فردریک برنارد ریمان (۱۸۲۶ـ۱۸۶۶) ریاضیدان آلمانی که در عمر کوتاه خود، پیشرفت های زیادی را نصیب رشته های متعددی از ریاضیات نظیر آنالیز، نظریه اعداد، و هندسه دیفرانسیل کرد. سهم او در ابداع هندسه ریمانی در واقع راه را برای تدوین نهایی نظریه نسبیت عام باز کرد.

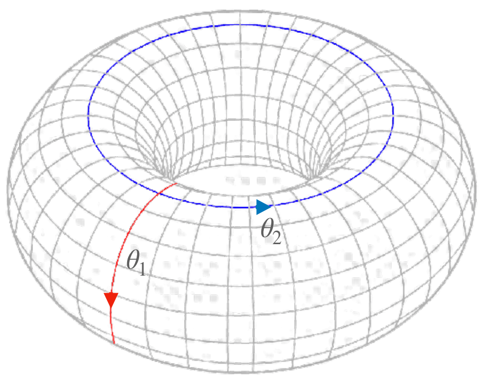
ث: آیا می توانید این کار را برای کره N بعدی تعمیم دهید؟



شکل ۶: مختصات استریوگرافیک برای کره.

■ **تمرین: مختصات موضعی برای یک چنبره:** دایره ای را در نظر بگیرید که مرکز آن در نقطه $(0, R, 0)$ و شعاع آن برابر با a است. این

دایره را حول محور z که از مبداء مختصات می گذرد، دوران می دهیم. آنچه که حاصل می شود یک چنبره است. مطابق شکل (۷) هر نقطه از این چنبره را می توانیم با دو مختصه موضعی (θ_1, θ_2) توصیف کنیم. هر نقطه روی چنبره با مختصات دکارتی (x, y, z) را بر حسب این مختصات موضعی بیان کنید.



شکل ۷: مختصات موضعی برای یک چنبره.

■ **تمرین: کره ۳ بعدی به شعاع R در فضای دکارتی ۴ بعدی با معادله زیر توصیف می شود:**

$$x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = R^2.$$

این کره با سه مختصه موضعی (θ, ϕ, ψ) توصیف می شود. رابطه مختصات دکارتی چهارگانه را با این مختصات موضعی بدست آورید. آیا این کار را می توانید برای کره N بعدی نیز انجام دهید؟

۱.۳ اسکالرها، بردارها و تانسورها

برای وضوح سطح دوبعدی را با M نشان می دهیم. هر نقطه از این سطح مثل p با دو مختصه ی (u^1, u^2) مشخص می شود. ممکن است به این نقطه از سطح یک عدد (مثلا دمای آن نقطه از سطح یا میزان فشار) را نسبت دهیم. اگر این کمیت را با ϕ نشان دهیم می گوییم که ϕ یک کمیت

اسکالر است. اگر برای این نقطه مختصات دیگری انتخاب کنیم، مقدار ϕ (دما یا فشار آن نقطه از سطح) تغییر نمی کند. به همین دلیل کمیت اسکالر دارای این خاصیت است که تحت تغییر مختصات تغییر نمی کند، یعنی داریم:

$$\phi(u^1, u^2) = \phi(u'^1, u'^2). \tag{۶}$$

اما روی یک سطح کمیت های دیگری نیز وجود دارند. مثلا جهت و اندازه سرعت بادی که روی سطح می وزد یک کمیت برداری است. چنین برداری با دو مولفه مشخص می شود. برای این که این مولفه ها را مشخص کنیم. برای مشخص کردن این مولفه ها احتیاج به بردارهای پایه ای داریم که بر سطح مماس باشند و بتوان هر برداری را بر حسب آنها بسط داد. نقطه ای با مختصات موضعی (u^1, u^2) در واقع نشان دهنده یک بردار $\mathbf{r}$ نیز هست. این بردار نشان دهنده آن نقطه روی سطح است. بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(u^1, u^2). \tag{۷}$$

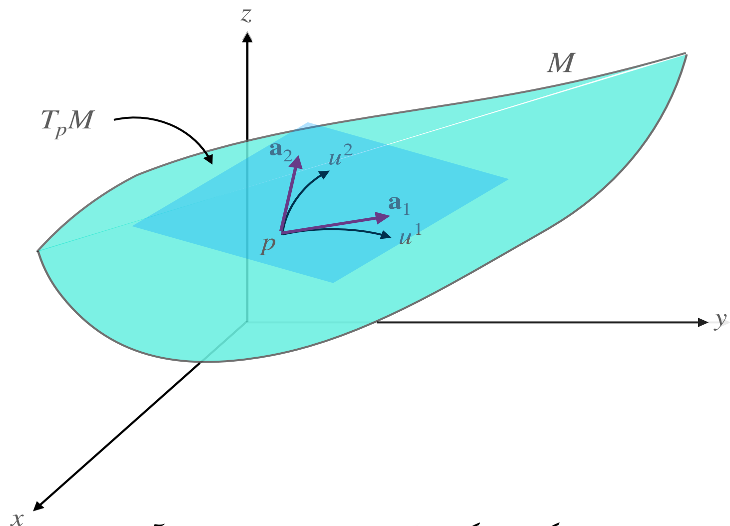
مثلا در مورد کره می توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{r} = \hat{x}\sin\theta\cos\phi + \hat{y}\sin\theta\sin\phi + \hat{z}\cos\theta. \tag{۸}$$

حال منحنی هایی را در نظر می گیریم که روی آنها تنها یکی از مختصه ها تغییر می کند. بردارهای مماس بر این منحنی ها بر سطح مماس هستند. این بردارها به شکل زیر تعریف می شوند:

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_1 &:= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^1} \\ \mathbf{e}_2 &:= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^2}. \end{aligned} \tag{۹}$$

اگر یک نقطه مثل $p \equiv (u^1, u^2)$ با مختصات (u^1, u^2) در نظر بگیریم، مجموعه تمام ترکیب های خطی از این دو بردار، تشکیل یک فضای برداری می دهند که بر سطح M در آن نقطه مماس است. این فضا را فضای مماس بر M در نقطه p می نامیم و آن را با T_pM نشان می دهیم، شکل (۸).

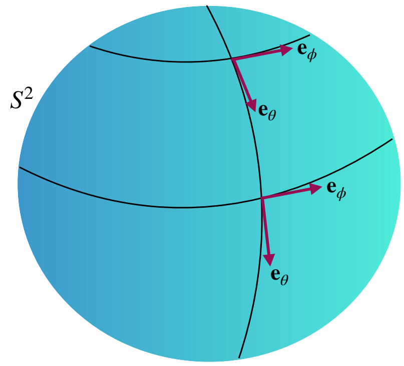


شکل ۸: یک سطح خمیده و فضای مماس بر آن.

به عنوان یک مثال مشخص می توانیم کره ای به شعاع R را در نظر بگیریم که مختصات روی آن را با θ و ϕ نشان می دهیم. برای این کره داریم:

$$\begin{aligned}
\mathbf{e}_\theta &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta} = \hat{x}\cos\theta\cos\phi + \hat{y}\cos\theta\sin\phi - \hat{z}\sin\theta, \\
\mathbf{e}_\phi &= \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} = -\hat{x}\sin\theta\sin\phi + \hat{y}\sin\theta\cos\phi.
\end{aligned} \tag{۱۰}$$

دقت کنید که در ظاهرا این بردارها سه مولفه ای به نظر می رسند، اما می توانید نشان دهید که هر دو بردار بر سطح مماس هستند. برای این کار نشان دهید که $\mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_\theta = \mathbf{r}\cdot\mathbf{e}_\phi = 0$ است. این بردارها در شکل (۹) نشان داده شده اند.



شکل ۹: بردارهای مماس بر کره دو بعدی.

حال یک بردار مماس در نقطه p (سرعت باد در نقطه p) را می توان بر حسب این بردارهای پایه بسط داد. به عبارت دیگر می توان نوشت

$$\mathbf{X} \in T_pM \quad \longrightarrow \quad \mathbf{X} = X^1\mathbf{e}_1 + X^2\mathbf{e}_2 \equiv X^i\mathbf{e}_i. \tag{۱۱}$$

باید همواره به یاد داشته باشیم که بردارهای مماس، الزاما یکه نیستند، بر یکدیگر عمود هم نیستند. هرگاه مختصات روی سطح را عوض کنیم، بردارهای یکه نیز عوض خواهند شد و به دنبال آن مولفه های یک بردار مثل X نیز عوض خواهند شد. در واقع تحت تبدیل مختصات داریم:

$$\mathbf{e'}_i \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u'^i} = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i}\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^j} = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i}\mathbf{e}_j \tag{۱۲}$$

و یا به طور خلاصه

$$\mathbf{e'}_i = \frac{\partial u^j}{\partial u'^i}\mathbf{e}_j. \tag{۱۳}$$

با نوشتن بردار X به دو صورتِ

$$\mathbf{X} = X^i\mathbf{e}_i = X'^j\mathbf{e'}_j \tag{۱۴}$$

و استفاده از رابطه (۱۳) رابطه تبدیل مختصات به شکل زیر مشخص می شود:

$$X^i = \frac{\partial u^i}{\partial u'^j}X'^j. \tag{۱۵}$$

همانطور که گفتیم، بردارهای $\mathbf{e}_i$ یک پایه بهنجار برای فضای مماس تشکیل نمی دهند. در یک فضای برداری وقتی که بردارها یک پایه بهنجار تشکیل ندهند، دیگر نمی توان مولفه ها را با استفاده از رابطه ای مثل $X_i = \mathbf{X}\cdot\mathbf{e}_i$ بدست آورد. این ناممکنی را می توان در جای متفاوت اندیس ها در دو طرف این رابطه نیز دید که فعلا در این مرحله از نظر زیبایی شناسی نادرست به نظر می رسد. در هر فضای برداری که یک پایه نابهنجار مثل $\{\mathbf{e}_i\}$ داشته باشد، می توان پایه دیگری را مثل $\{\mathbf{e^i}\}$ چنان تعریف کرد که در شرط زیر صدق کنند:

$$\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}_j = \delta^i_j. \tag{۱۶}$$

این پایه را می توانیم پایه دوگان [۱۴] بنامیم. در این صورت مولفه های یک بردار از رابطه ساده و زیبای زیر بدست می آیند:

$$X^i = \mathbf{X}\cdot\mathbf{e}^i. \tag{۱۷}$$

هرگاه رابطه (۱۶)

را در دو مختصات مختلف بنویسیم و از رابطه تبدیل مختصات (۱۳) استفاده کنیم می بینیم که تحت تبدیل مختصات بردارهای پایه دوگان به صورت زیر تبدیل می شوند:

$$\mathbf{e}^i = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\mathbf{e}^{i'}. \tag{۱۸}$$

می توانیم عناصری را به شکل زیر تعریف کنیم و آنها را هم‌ـبردار [۱۵] یا یک‌ـفرم [۱۶] می خوانیم [۱۷].

$$\boldsymbol{\omega} = \omega_i\mathbf{e}^i \tag{۱۹}$$

در این صورت وقتی که مختصات تغییر می کند، مولفه های یک هم‌ـبردار هم تغییر می کند. در واقع داریم:

$$\omega_i\mathbf{e}^i = \omega_{i'}\mathbf{e}^{i'} \tag{۲۰}$$

که از آن نتیجه می گیریم:

$$\omega_i = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}\omega_{i'} \tag{۲۱}$$

[۱۴] Dual Basis

[۱۵] covector

[۱۶] one-form

[۱۷] در انتهای این درس تعریف با دقیق تری از فرم ها یا فرم های دیفرانسیل به طور کلی آشنا خواهیم شد.

فرض ما این است که خواننده قبلا با مفهوم ضرب تانسوری بردارها آشنا شده است. با این فرض می توانیم تانسورهای با رتبه های مختلف را تعریف کنیم. به عنوان مثال

$$T = T^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j$$

یک تانسور با رتبه $(2,0)$ و

$$\Omega = \omega_{ij}\mathbf{e}^i \otimes \mathbf{e}^j$$

یک تانسور با رتبه $(0,2)$ و

$$\sigma = {\sigma^i}_j\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}^j$$

یک تانسور با رتبه $(1,1)$ است. تبدیل مولفه های تانسورها نیز با مساوی قرار دادن بسط آنها بر حسب بردارهای پایه بدست می آید. به عنوان مثال از رابطه

$$T^{ij}\mathbf{e}_i \otimes \mathbf{e}_j = T'^{kl}{\mathbf{e}'}_k \otimes {\mathbf{e}'}_l \quad (۲۲)$$

می فهمیم که

$$T^{ij} = \frac{\partial u^i}{\partial u'^k}\frac{\partial u^j}{\partial u'^l}T'^{kl}. \quad (۲۳)$$

۲.۳ میدان های اسکالر، برداری و تانسوری

هر گاه به هر نقطه از سطح یک کمیت اسکالر نسبت دهیم، (مثلا دمای تمام نقاط را تعیین کنیم) می گوییم یک میدان اسکالر تعریف کرده ایم. هرگاه به هر نقطه از سطح یک بردار نسبت دهیم (مثلا سرعت وزش باد را در همه نقاط تعیین کنیم)می گوییم یک میدان برداری تعریف کرده ایم. به همین روش نیز میدان های تانسوری روی سطح تعریف می شوند. بنابراین یک میدان برداری روی یک خمینه دو بعدی به صورت $\mathbf{X}(u^1, u^2)$ تعریف می شود. این میدان ها می توانند پیوسته و مشتق پذیر باشند یا نباشند. معمولا ما فرض می کنیم که این میدان ها در تمامی نقاط یک خمینه به جز تعداد انگشت شماری از نقاط پیوسته و مشتق پذیرند. تعداد این نقاط در واقع بستگی به توپولوژی خمینه دارد. به عنوان مثال سعی کنید یک میدان برداری پیوسته روی یک کره رسم کنید: خواهید دید که حداقل در دو نقطه این میدان دارای تکینگی خواهد بود. اما روی یک چنبره می توانید یک میدان که تماما پیوسته و مشتق پذیر باشد رسم کنید.

قبل از پایان دادن به این بخش تاکید می کنیم که همه آنچه که در باره یک سطح دوبعدی گفتیم به راحتی به یک ابرسطح یا خمینه دلخواه n بعدی که با n مختصه موضعی مشخص می شود تعمیم پیدا می کند. چنین خمینه ای را حتما می توان در یک فضای دکارتی با بعد M نشاند و آن را با معادلات پارامتری زیر توصیف کرد:

$$\begin{aligned} x^1 &= x^1(u^1, u^2, \cdots, u^n) \\ x^2 &= x^2(u^1, u^2, \cdots, u^n) \\ x^3 &= x^3(u^1, u^2, \cdots, u^n) \\ \cdots & \quad \cdots \\ x^M &= x^M(u^1, u^2, \cdots, u^n). \end{aligned} \tag{۲۴}$$

■ **تمرین:** یک سهمی گون که در فضای سه بعدی قرار گرفته با معادله زیر توصیف می شود:

$$z = a(x^2 + y^2) + b, \qquad a,\ b > 0.$$

این سهمی گون یک خمینه دوبعدی است. برای آن دو مختصه موضعی تعریف کنید و سپس بردارهای مماس بر سطح آن را بدست آورید.

■ **تمرین:** معادلات پارامتری سطح یک بیضی گون دو بعدی را که در فضای سه بعدی قرار گرفته بدست آورید. بردارهای مماس بر سطح $\{\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2\}$ را تعیین کنید. بردارهای $\{\mathbf{e}^1, \mathbf{e}^2\}$ را نیز تعیین کنید.

۳.۳ نمادگذاری دیراک

پاوول دیراک یکی از مبتکران استثنایی در نمادگذاری های فوق العاده زیبا و کارآمد بوده است. همه ما با نمادگذاری کت و برا در مکانیک کوانتومی که از ابداعات اوست آشنا هستیم ولی او ابتکار خارق العاده دیگری نیز در نمادگذاری های هندسه دیفرانسیل و نسبیت عام دارد که شاید کمتر کسی با آن آشنا باشد. وقتی با تانسورها و تبدیل آنها در مختصات مختلف سروکار داریم استفاده از این مختصات بی اندازه کار آمد است. خلاقیت اصلی و فوق العاده ساده در این نمادگذاری این است که علامت پریم را به جای آنکه روی خود تانسور بگذاریم روی اندیس های آن قرار

دهیم یعنی قرار دهیم:

$$X'^{i} \longrightarrow X^{i'}. \tag{۲۵}$$

بنابراین رابطه (۱۵) به این صورت نوشته می شود:

$$X^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^{i}} X^{i}. \tag{۲۶}$$

و یا رابطه (۲۷) به صورت زیر نوشته می شود:

$$T^{ij} = \frac{\partial u^{i}}{\partial u i'} \frac{\partial u^{j}}{\partial u j'} T^{i'j'}. \tag{۲۷}$$

و یا در مورد تانسورهای با رتبه های بالاتر

$$T^{ij}{}_{k} = \frac{\partial u^{i}}{\partial u^{i'}} \frac{\partial u^{j}}{\partial u^{j'}} \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^{k}} T^{i'j'}{}_{k'}. \tag{۲۸}$$

فایده این نمادگذاری واقعا در عمل و در محاسبات طولانی بخصوص وقتی که با مولفه های تانسورها کار می کنیم، مشخص می شود. کار برد این نمادگذاری اولا باعث صرفه جویی در تعداد نام های اندیس ها می شود. ثانیاً باعث می شود که خیلی از روابط تانسوری را تنها با توجه به جای اندیس ها بتوانیم درست و بدون اشتباه بنویسیم.

۴ مشتق هموردا

در این بخش با یک مفهوم مهم به نام مشتق هموردا [۱۸] آشنا می شویم. اما قبل از آن به یک نکته در مورد نامگذاری اشاره می کنیم.

■ **یک نکته در مورد نمادگذاری:** در هر جایی که مختصه u را بدون اندیس می نویسیم منظور ما مجموعه ی همه اندیس های آن است، مثل $\phi(u) \equiv \phi(u^1, u^2)$ یا $\mathbf{X}(u) \equiv \mathbf{X}(u^1, u^2)$.

[۱۸] Covariant Derivative

چنانکه گفتیم هرگاه یک کمیت عددی را به طور پیوسته و مشتق پذیر به تمامی نقاط یک خمینه نسبت دهیم گوییم یک میدان اسکالر روی سطح تعریف شده است. چنین میدان اسکالری با $\phi(u) \equiv \phi(u^1, u^2)$ مشخص می شود. به همین شکل میدان های برداری یا میدان های تانسوری روی یک خمینه تعریف می شوند و با نمادهای $\mathbf{X}(u)$ یا $\mathbf{T}(u)$ مشخص می شوند. هرگاه بخواهیم مشتق کمیتی از هر نوع را روی یک سطح تعریف کنیم همواره باید از خود بپرسیم که این مشتق را در کدام جهت می خواهیم محاسبه کنیم. به عبارت بهتر می خواهیم تغییرات این کمیت را در کدام جهت محاسبه کنیم. بنابراین مشتق کمیت ها همواره در جهت یک بردار مماس تعریف می شوند. این مشتق ها را با علامت $\nabla_{\mathbf{X}}$ مشخص می کنیم. اصطلاحاً این مشتق را مشتق هموردا می نامیم ولی شاید اسم مشتق برداری یا مشتق جهت دار برای آن مناسب تر باشد.

مشتق یک میدان اسکالر در یک راستا که توسط بردارِ $\mathbf{X} = (X^1, X^2)$ مشخص می شود، به سادگی تعریف می شود:

$$\nabla_X \phi(u) := \lim_{\epsilon \longrightarrow 0} \frac{\phi(u^1 + \epsilon X^1, u^2 + \epsilon X^2) - \phi(u^1, u^2)}{\epsilon} = X^1 \partial_1 \phi + X^2 \partial_2 \phi = X^i \partial_i \phi. \qquad (۲۹)$$

مشتق میدان ϕ در راستای $\mathbf{e}_i$ را با $\nabla_{\mathbf{e_i}}$ یا حتی ساده تر از آن با ∇_i نشان می دهیم. به این ترتیب برای یک میدان اسکالر داریم:

$$\nabla_{\mathbf{e}_i} \phi = \nabla_i \phi = \partial_i \phi = \phi_{,i}. \qquad (۳۰)$$

در رابطه آخر از نماد $\phi_{,i}$ برای نشان دادن $\frac{\partial}{\partial u^i} \phi = \partial_i \phi$ استفاده کرده ایم.

حال می خواهیم مشتق هموردای یک میدان برداری $Y(u)$ را در راستای $\mathbf{e_i}$ در یک نقطه با مختصات $u = (u^1, u^2)$ تعریف کنیم. آیا می توانیم بنویسیم:

$$\nabla_i \mathbf{Y} \equiv \nabla_i (Y^j \mathbf{e}_j) = (\nabla_i Y^j) \mathbf{e_j} \ ? \qquad (۳۱)$$

یعنی آیا می توانیم فقط از مولفه های یک بردار مشتق بگیریم و آن را به مثابه مشتق از کل بردار تلقی کنیم؟ واضح است که این تعریف یک اشکال اساسی دارد . در واقع با نوشتن چنین تعریفی فرض کرده ایم که در انتقال از یک نقطه به نقطه دیگر در روی سطح خمیده تنها مولفه های یک میدان برداری تغییر می کنند و کافی است از این مولفه ها مشتق بگیریم و حال آنکه بردارهای پایه نیز نقطه به نقطه تغییر می کنند. بنابراین اگر بخواهیم به درستی مشتق را محاسبه کنیم می بایست تغییر بردارهای پایه را نیز در نظر بگیریم. طبیعی است که بخواهیم مشتق هموردا از قاعده لایب نیتزی (یعنی قاعده مربوط به مشتق حاصل ضرب ها) نیز پیروی کند. با استفاده از این نکته سعی می کنیم پله پله به تعریف درستی از مشتق هموردای یک میدان برداری دست پیدا کنیم. بنابراین می نویسیم:

$$\nabla_i \mathbf{Y} = \nabla_i (Y^j \mathbf{e}_j) = (\nabla_i Y^j) \mathbf{e}_j + Y^j \nabla_i \mathbf{e}_j. \qquad (۳۲)$$

حال از این استفاده می کنیم که Y^j یک تابع اسکالر است و همان طور که دیدیم مشتق هموردای آن یک مشتق معمولی است. در نتیجه $\nabla_i Y^j = Y^j{}_{,i}$. اما مهم تر این است که $\nabla_i \mathbf{e}_j$ چیست و چگونه به دست می آید. این مشتق در واقع تفاوت بین بردار $\mathbf{e_j}$ در دو نقطه نزدیک به هم در امتداد بردارِ $\mathbf{e}_i$ است که بر سطح خمیده تصویر شده است. در واقع تفاوت این دو بردار در دو نقطه نزدیک به هم به طور کلی بر سطح خمیده مماس نیست اما همواره می توانیم این تفاوت را روی سطح خمیده تصویر کنیم تا بر سطح خمینه مماس شود. این تصویر مماس شده همانی است که ما آن را با $\nabla_i \mathbf{e_j}$ نشان می دهیم. این بردار حتما بسطی بر حسب بردارهای مماس این نقطه دارد و می توانیم این بسط را به صورت زیر بنویسیم:

$$\nabla_i \mathbf{e}_j = \Gamma^k{}_{ij} \mathbf{e}_k. \tag{۳۳}$$

این رابطه در واقع نمادهای کریستوفل [۱۹] را به صورت $\Gamma^k{}_{ij}$ تعریف می کند. در واقع نمادهای کریستوفل به صورت زیر تعیین می شوند:

$$\Gamma^k{}_{ij} = \mathbf{e}^k \cdot \nabla_i \mathbf{e}_j. \tag{۳۴}$$

به این ترتیب مشتق هموردای میدان برداری برابر می شود با:

$$\nabla_i \mathbf{Y} = (\partial_i Y^j)\mathbf{e}_j + Y^j \Gamma^k{}_{ij} \mathbf{e}_k, \tag{۳۵}$$

و یا پس از تغییر نام اندیس ها

$$\nabla_i \mathbf{Y} = (\partial_i Y^k)\mathbf{e}_k + Y^j \Gamma^k{}_{ij} \mathbf{e}_k = (Y^k{}_{,i} + \Gamma^k{}_{ij} Y^j)\mathbf{e}_k. \tag{۳۶}$$

با نمادگذاری خلاصه این رابطه را به شکل زیر می نویسیم:

$$Y^k{}_{;i} = Y^k{}_{,i} + \Gamma^k{}_{ij} Y^j. \tag{۳۷}$$

در اینجا نماد $Y^k{}_{;i}$ به عنوان خلاصه ای از $\nabla_i Y^k$ به کار رفته است. به این ترتیب ما توانسته ایم یک اتصال یا همبندی [۲۰] بین فضاهای مماس بین نقاط یک خمینه ایجاد کنیم.

■ **تمرین:** برای سطح دوبعدی R^2 یک بار مختصات دکارتی (x, y) و بار دیگر مختصات قطبی (r, θ) را به کار ببرید. علایم کریستوفل را یک بار برای مختصات (x, y) و بار دیگر برای مختصات (r, θ) محاسبه کنید.

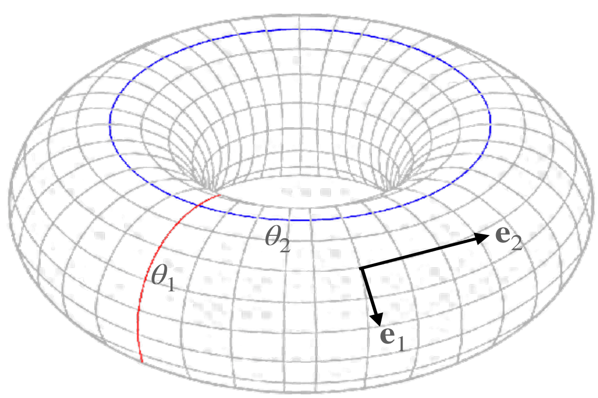
[۱۹] Christofell Symbols
[۲۰] Connection

■ **تمرین:** روی سطح کره دوبعدی بردارهای $\mathbf{e}_\theta$ و $\mathbf{e}_\phi$ را بدست آورید. سپس با استفاده از تعریف $\nabla_i\mathbf{e}_j=\Gamma^k{}_{ij}\mathbf{e}_k$ نمادهای کریستوفل را محاسبه کنید. به عنوان مثال

$$\nabla_\theta\mathbf{e}_\theta=\Gamma^\theta{}_{\theta,\theta}\mathbf{e}_\theta+\Gamma^\phi{}_{\theta,\theta}\mathbf{e}_\phi. \quad (۳۸)$$

به یاد داشته باشید که برای محاسبه $\nabla_\theta\mathbf{e}_\theta$ می بایست مشتق $\mathbf{e}_\theta$ را محاسبه کنید و سپس آن را بر سطح کره تصویر کنید.

■ **تمرین:** روی سطح چنبره می توانید دو مختصه ی θ_1 و θ_2 را به عنوان مختصات موضعی به کار ببرید. این دو مختصه در واقع نشان دهنده زوایای طی شده در دو دایره ای هستند که چنبره را تعریف می کنند، شکل (۱۰).



شکل ۱۰: یک چنبره و بردارهای مماس بر آن.

بردارهای $\mathbf{e}_{\theta_1}$ و $\mathbf{e}_{\theta_2}$ را بدست آورید. سپس با استفاده از تعریف $\nabla_i\mathbf{e}_j=\Gamma^k{}_{ij}\mathbf{e}_k$ نمادهای کریستوفل را محاسبه کنید.

با وجود آنکه علایم کریستوفل دارای سه اندیس هستند، اما تبدیل آنها مثل یک تانسور رتبه سه نیست. برای اینکه تبدیل آنها را بدست آوریم از رابطه ی

$$\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}_j=\delta^i_j \quad (۳۹)$$

استفاده می کنیم و با توجه به رابطه (۳۳) بدست می آوریم:

$$\Gamma^k{}_{ij} = \mathbf{e}^k \cdot \frac{\partial}{\partial u_i}\mathbf{e}_j. \tag{۴۰}$$

از آنجا که تبدیل همه بردارهای پایه را می دانیم، با کمی محاسبه بدست می آوریم:

$$\Gamma^{k'}{}_{i',j'} = \mathbf{e}^{k'} \cdot \frac{\partial}{\partial u_{i'}}\mathbf{e}_{j'} = \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k}\mathbf{e}^k \cdot \frac{\partial}{\partial u^{i'}}(\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}\mathbf{e}_j) = \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k}\mathbf{e}^k \cdot \left[\frac{\partial^2 u^j}{\partial u^{i'}\partial u^{j'}}\mathbf{e}_j + \frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^{i'}}\right] \tag{۴۱}$$

با توجه به $\mathbf{e}^k \cdot \mathbf{e}_j = \delta^k_j$ رابطه بالا تبدیل می شود به

$$\Gamma^{k'}{}_{i',j'} = \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k}\frac{\partial^2 u^k}{\partial u^{i'}\partial u^{j'}} + \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}\mathbf{e}^k \cdot \frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^{i'}} = \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k}\frac{\partial^2 u^k}{\partial u^{i'}\partial u^{j'}} + \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}\mathbf{e}^k \cdot (\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial \mathbf{e}_j}{\partial u^i}) \tag{۴۲}$$

و در آخرین مرحله نیز با استفاده از تعریف $\Gamma^k{}_{ij} = \mathbf{e}^k \cdot \partial_i \mathbf{e}_j$ به نتیجه زیر می رسیم:

$$\Gamma^{k'}{}_{i',j'} = \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k}\frac{\partial^2 u^k}{\partial u^{i'}\partial u^{j'}} + \frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k}\frac{\partial u^j}{\partial u^{j'}}\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\Gamma^k{}_{ij}. \tag{۴۳}$$

در طرف راست اگر جمله اول را نمی داشتیم، تبدیل علایم کریستوفل نیز مثل یک تانسور می شد، اما این جمله نشان می دهد که علایم کریستوفل یک تانسور رتبه سه نیستند. هم چنین مشتق های معمولی یک بردار یعنی $Y^k{}_{,i} \equiv \partial_i Y^k$ نیز با وجود اینکه دو اندیس دارند ولی یک تانسور رتبه دو نیستند. در واقع تبدیل آنها چنین است:

$$\begin{aligned}\frac{\partial Y^{k'}}{\partial u^{i'}} &= (\frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial}{\partial u^i})(\frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k}Y^k)\\ &= \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial^2 u^{k'}}{\partial u^i \partial u^k}Y^k + \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\frac{\partial u^{k'}}{\partial u^k}\frac{\partial Y^k}{\partial u^i}\end{aligned} \tag{۴۴}$$

■ **تمرین:** نشان دهید که اگر چه علایم Γ^k_{ij} و مولفه های $\partial_i Y^k$ هیچ کدام تانسور نیستند،ولی $\nabla_i Y^k$ یک تانسور است.

حال که مشتق هموردای بردارها را تعریف کرده ایم براحتی می توانیم مشتق هموردای تانسور ها را نیز محاسبه کنیم. یک تانسور ساده از حاصل ضرب دو بردار حاصل می شود. مشتق هموردای چنین تانسوری برابر است با:

$$(X^iY^j)_{;m} = X^i_{;m}Y^j + X^iY^j_{;m} = Y^j(X^i_{,m} + \Gamma^i_{m,l}X^l) + X^i(Y^j_{,m} + \Gamma^j_{m,l}Y^l) \tag{۴۵}$$

یک تانسور رتبه دوی دلخواه مجموعی از حاصل ضرب بردارهاست، بنابراین

$$R^{ij}{}_{;m} = R^{ij}{}_{,m} + \Gamma^i{}_{m,l}R^{lj} + \Gamma^j{}_{m,l}R^{il}. \tag{۴۶}$$

به همین روش نیز می توانیم مشتق هموردای یک هم‐بردار را بدست آوریم. به این نکته توجه می کنیم که مشتق هموردای یک میدان اسکالر با مشتق معمولی آن یکسان است، یعنی

$$(X^i\omega_i)_{;m} = (X^i\omega_i)_{,m}. \tag{۴۷}$$

با بسط طرف راست و چپ به صورت

$$(X^i)_{;m}\omega_i + X^i\omega_{i;m} = X^i{}_{,m}\omega_i + X^i\omega_{i,m} \tag{۴۸}$$

و سپس استفاده از عبارتی که برای $(X^i)_{;m}$ داریم

$$(X^i_{,m} + \Gamma^i{}_{m,l}X^l)\omega_i + X^i(\omega_{i;m}) = X^i_{,m}\omega_i + X^i\omega_{i,m} \tag{۴۹}$$

و ساده کردن دو طرف به رابطه زیر می رسیم.

$$\Gamma^i{}_{m,l}X^l\omega_i + X^i(\omega_{i;m}) = X^i\omega_{i,m} \tag{۵۰}$$

از آنجا که این تساوی برای هر بردار X درست است، به نتیجه نهایی زیر می رسیم:

$$\omega_{i;m} = \omega_{i,m} - \Gamma^l{}_{m,i}\omega_l. \tag{۵۱}$$

با استفاده از این رابطه و رابطه ای که برای مشتق هموردای بردارها و اعمال قانون لایب نتیز (یعنی قانون مشتق حاصل ضرب) داریم، می توانیم مشتق هموردای هر تانسوری را با هر رتبه ای به دست آوریم. به عنوان مثال

$$\nabla_k\Omega_{ij} = \partial_k\Omega_{ij} - \Gamma^m{}_{ki}\Omega_{mj} - \Gamma^m{}_{kj}\Omega_{im} \tag{۵۲}$$

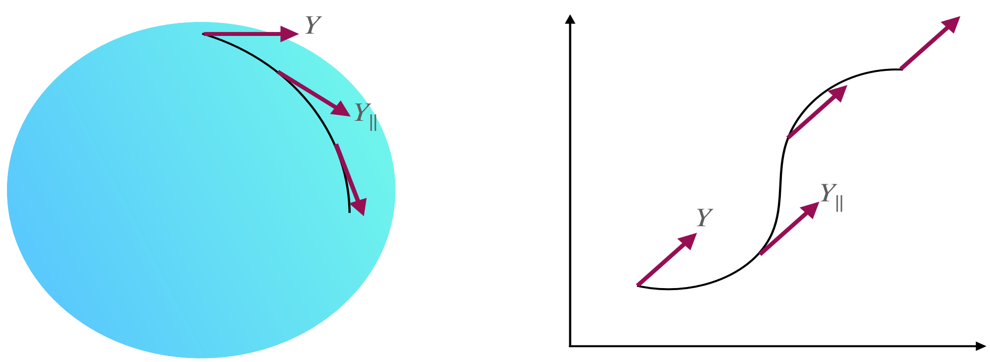
یا

$$\nabla_k T^i{}_j = \partial_k T^i{}_j + \Gamma^i{}_{km}T^m{}_j - \Gamma^m{}_{kj}T^i{}_m \tag{۵۳}$$

۵ انتقال موازی

مفهوم مشتق هموردا با یک مفهوم مهم دیگر به نام انتقال موازی [۲۱] همبسته است. انتقال موازی یک بردار در یک صفحه تخت یا یک فضای دکارتی به معنای این است که یک بردار را بدون آنکه جهت آن را تغییر دهیم در امتداد یک منحنی حرکت دهیم. سمت راست شکل (۱۱) انتقال موازی یک بردار را در صفحه دو بعدی نشان می دهد که در امتداد یک منحنی انتقال موازی یافته است. این انتقال موازی خیلی ساده است. مولفه های بردار را تغییر نمی دهیم و بردار را به همان شکل صلبی که وجود دارد در امتداد منحنی داده شده حرکت می دهیم. در سمت چپ همان شکل یک بردار نشان داده شده که روی کره و در امتداد یک منحنی انتقال موازی یافته است. می خواهیم بفهمیم که انتقال موازی یک بردار در امتداد یک منحنی روی کره یا یک سطح خمیده دیگر به چه معناست و به چه صورت تعریف می شود.

برای فهم انتقال موازی به ترتیب زیر پیش می رویم. دو نقطه نزدیک به هم را با مختصات (u^1, u^2) و $(u^1+\epsilon^1, u^2+\epsilon^2)$ در نظر بگیریم.



شکل ۱۱: سمت راست: انتقال موازی یک بردار در امتداد یک منحنی روی صفحه دو بعدی، شکل سمت چپ: انتقال موازی یک بردار روی کره.

حال بردار $\mathbf{Y} = Y^i \mathbf{e}_i$ را در نقطه اول در نظر می گیریم. در این رابطه و تمامی رابطه های بعدی منظور از $\mathbf{e}_i$ همان بردارهای پایه در نقطه اول

[۲۱] Parallel Transport

است یعنی $\mathbf{e}_i = \mathbf{e}_i(u^1, u^2)$. این بردار در عین حال که یک بردار مماس بر سطح است، یک بردار سه بعدی در فضای دکارتی نیز هست. این بردار را در فضای سه بعدی به موازات خودش انتقال داده و به نقطه جدید منتقل می کنیم. در نتیجه به عنوان یک بردار سه بعدی هیچکدام از مولفه هایش تغییر نمی کنند و به صورت صلب از نقطه اول به نقطه دوم منتقل می شود. اما در این نقطه ی جدید این بردار دیگر مماس بر سطح نخواهد بود. اگر آن را بر سطح مماس کنیم، برداری به دست می آید که آن را انتقال موازی بردار $\mathbf{Y}$ به این نقطه جدید می خوانیم. برای این که مولفه i امِ این بردار جدید را حساب کنیم می بایست بردار $\mathbf{Y}$ را در $\mathbf{e}^i(u^1+\epsilon^1, u^2+\epsilon^2)$ ضرب کنیم. در نتیجه خواهیم داشت:

$$\mathbf{Y_\parallel}^i = \mathbf{e}^i(u^1+\epsilon^1, u^2+\epsilon^2)\cdot\mathbf{Y} = \left[\mathbf{e}^i + \epsilon^j\partial_j\mathbf{e}^i\right]\cdot\mathbf{Y} \qquad (۵۴)$$

با قرار دادن $\mathbf{Y} = Y^m\mathbf{e}_m$ و استفاده از $\mathbf{e}^i\cdot\mathbf{e}_j = \delta^i_j$ به رابطه زیر می رسیم:

$$\mathbf{Y_\parallel}^i = Y^i + \epsilon^j\partial_j\mathbf{e}^i\cdot(Y^m\mathbf{e}_m) \qquad (۵۵)$$

اما می دانیم که $\partial_j\mathbf{e}^i\cdot e_m = -\Gamma^i{}_{jm}$ بنابراین رابطه بالا تبدیل می شود به

$$\mathbf{Y_\parallel}^i = Y^i - \epsilon^j\Gamma^i{}_{jm}Y^m. \qquad (۵۶)$$

مشتق هموردای یک میدان برداری $\mathbf{Y}$ در امتداد یک بردار $\mathbf{X}$ در واقع چیزی نیست جز تفاوت بردار $\mathbf{Y}$ در نقطه $(u^1+\epsilon X^1, u^2+\epsilon X^2)$ و $\mathbf{Y}$ در نقطه (u^1, u^2) که به نقطه $(u^1+\epsilon X^1, u^2+\epsilon X^2)$ انتقال موازی یافته است. به عبارت ریاضی این مشتق چنین است:

$$\nabla_{\mathbf{X}}\mathbf{Y} = \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{\mathbf{Y}(u^1+\epsilon X^1, u^2+\epsilon X^2) - \mathbf{Y}_\parallel(u^1, u^2)}{\epsilon} \qquad (۵۷)$$

و یا بر حسب مولفه ها

$$\begin{aligned}\nabla_{\mathbf{X}}Y^i &= \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{Y^i(u^1+\epsilon X^1, u^2+\epsilon X^2) - Y^i_\parallel(u^1, u^2)}{\epsilon}\\ &= \lim_{\epsilon\longrightarrow 0}\frac{Y^i(u^1+\epsilon X^1, u^2+\epsilon X^2) - Y^i(u^1, u^2) + \Gamma^i{}_{jm}\epsilon X^jY^m}{\epsilon}\\ &= X^j(Y^i_{,j} + \Gamma^i{}_{jm}Y^m). \qquad (۵۸)\end{aligned}$$

پس از تعریف انتقال موازی بردارها می توانیم انتقال موازی هم- بردارها را نیز تعریف کنیم. با قرار دادن

$$\epsilon\nabla_{\mathbf{X}}\omega_i = \omega_i(u^1+\epsilon X^1, u^2+\epsilon X^2) - \omega_{\parallel_i}(u^1, u^2)$$

و استفاده از رابطه $\nabla_{\mathbf{X}}\omega_i = X^m(\omega_{i,m} - \Gamma^k{}_{im}\omega_k)$ بدست می آوریم:

$$\omega_{\parallel_i} = \omega_i + \Gamma^k{}_{im}X^m\omega_k. \qquad (۵۹)$$

با تعریف انتقال موازی هم‌ـبردارها می توانیم مشتق هموردای آنها را نیز تعریف کنیم:

$$\omega_{i;m} = \omega_{i,m} - \Gamma^k_{im}\omega_k. \tag{۶۰}$$

۶ متریک و هندسه ریمانی

تا کنون فقط یک سطح و مختصات موضعی روی آن و بردارهای مماس بر آن را تعریف کرده ایم. موجود دوبعدی ای که روی این سطح زندگی می کند هنوز تصوری از طول ها و زاویه ها ندارد و نمی تواند آنها را با هم مقایسه کند. این موجود تصوری از ضرب داخلی دو بردار نیز ندارد و نمی داند که آیا دو بردار مماس بر سطح موازی هستند یا خیر یا اینکه زاویه بین آنها چقدر است. طبیعتاً هنوز تصوری از انحنا نیز ندارد، زیرا نمی تواند مشخص کند که آیا دو خط با هم موازی هستند یا نه و نمی تواند تعیین کند که مجموع زوایای یک مثلث مساوی با ۱۸۰ درجه است یا از آن بیشتر یا کمتر است. برای اینکه بتواند به چنین سوالاتی پاسخ دهد می بایست ضرب داخلی دو بردار مماس را تعریف کند. ضرب داخلی دو بردار نیز کمیتی عددی است که به دو بردار از یک فضای برداری نسبت داده می شود به گونه ای که دارای خاصیت های معینی باشد. برای فضای مماس T_pM این ضرب داخلی را با نگاشت $g: T_pM \times T_pM \longrightarrow R$ نشان می دهیم و مثل هر ضرب داخلی دیگری تقاضا می کنیم که این ضرب داخلی نسبت به هر کدام از مولفه هایش خطی باشد. علاوه بر این تقاضا می کنیم که این ضرب داخلی متقارن باشد. به طور دقیق تر آنچه که می خواهیم این است:

$$\begin{aligned} g(\alpha X + Y, Z) &= \alpha g(X,Z) + g(Y,Z), \qquad \alpha \in R, \ \ X, Y \in T_p(M) \\ g(X,Y) &= g(Y,X) \\ \text{if} \ \ g(X,Y) &= 0 \ \forall Y \ \longrightarrow \ X = 0. \end{aligned} \tag{۶۱}$$

خاصیت آخر بیان می کند که هر برداری که ضرب داخلی اش با همه بردارهای دیگر برابر با صفر باشد، حتما خودش صفر است. معمولا یک خاصیت دیگر را هم اضافه می کنیم و آن اینکه

$$g(X,X) \geq 0. \tag{۶۲}$$

هرگاه ضرب داخلی ای که روی خمینه تعریف می کنیم این خاصیت آخری را نیز داشته باشد آن را متریک ریمانی [۲۲] نامیم. خمینه ای که به یک متریک ریمانی مجهز شده باشد، یک خمینه ریمانی نامیده می شود. در نسبیت عام متریک دارای چنین خاصیتی نیست. چنین متریکی را متریک شبه ریمانی [۲۳] می نامیم. این خاصیت ها نشان می دهند که کافی است ضرب داخلی را برای بردارهای پایه تعریف کنیم، چرا که با در دست داشتن ضرب داخلی بردارهای پایه می توانیم ضرب داخلی هر دو برداری را تعیین کنیم. بنابراین هرگاه قرار دهیم:

$$g(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) = g_{ij} \tag{۶۳}$$

که در آن g_{ij} مولفه های یک ماتریس متقارن و وارون پذیر باشد، می گوییم یک متریک روی سطح تعریف کرده ایم. در بسیاری از موارد برای سادگی از نماد $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}$ به جای $g(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$ استفاده می کنیم. بنابراین داریم:

$$\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y} = g_{ij} X^i Y^j \tag{۶۴}$$

معمولا وقتی صحبت از متریک می کنیم منظورمان همان ماتریس یا تانسور g_{ij} است. دقت کنید که روی یک سطح می توان متریک های متفاوتی را تعریف کرد و هر متریکی که تعریف کنیم باعث تغییر خصوصیات آن سطح می شود.

- **تمرین:** از خاصیت های قید شده برای متریک نتیجه بگیرید که g_{ij} ها مولفه های یک ماتریس وارون پذیر هستند.

- **تمرین:** نشان دهید که متریک g_{ij} یک تانسور است.

از آنجا که متریک وارون پذیر است می توانیم وارون آن را به صورت زیر و با اندیس های بالا تعریف کنیم:

$$g^{ij} g_{jl} = \delta^i_l \tag{۶۵}$$

با داشتن متریک می توانیم بردارهای $\mathbf{e}^i$ را به سادگی تعریف کنیم:

$$\mathbf{e}^i := g^{ij} \mathbf{e}_j \tag{۶۶}$$

براحتی معلوم می شود که

$$\mathbf{e}^i \cdot \mathbf{e}_j = \delta^i_j \tag{۶۷}$$

[۲۲] Riemannian Metric

[۲۳] Pseudo-Riemannian Metric

با داشتن متریک می توانیم اندیس های تانسورها را بالا یا پایین ببریم. بنابراین می توانیم بنویسیم:

$$X^i = g^{ij}X_j, \qquad X_i = g_{ij}X^j. \tag{۶۸}$$

حال یک بردار بی نهایت کوچک را که دو نقطه ی (u^1, u^2) و (u^1+du^1, u^2+du^2) را به هم متصل می کند در نظر می گیریم. این بردار چنین است:

$$d\mathbf{s} = du^i \mathbf{e}_i \tag{۶۹}$$

در نظر می گیریم. طول این بردار بی نهایت کوچک از رابطه زیر بدست می آید:

$$ds^2 = g_{ij}du^i du^j. \tag{۷۰}$$

از این به بعد همواره متریک را به همین صورت معرفی می کنیم به این معنا که بیان می کنیم طول یک منحنی خیلی کوچک به چه صورت محاسبه می شود. عبارت درجه دویی که برای طول این منحنی می نویسیم متریک را معرفی می کند. به عنوان مثال متریک فضای سه بعدی در مختصات دکارتی و هم چنین مختصات کروی به ترتیب به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 \\ ds^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2\theta d\phi^2. \end{aligned} \tag{۷۱}$$

طول یک منحنی

$$\gamma(t) = (u^1(t), u^2(t)), \quad t = 0\cdots 1$$

به صورت زیر محاسبه می شود:

$$L(\gamma) := \int_0^1 ds = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}du^i du^j} = \int_0^1 \sqrt{g_{ij}\dot{u^i}\dot{u^j}}dt. \tag{۷۲}$$

- **تمرین:** الف- روی کره دوبعدی طول یک منحنی نصف النهار را که از قطب شمال شروع شده و تا زاویه $\theta = 60$ ادامه پیدا می کند حساب کنید.

  ب- روی کره دوبعدی طول یک منحنی را که با معادله $\theta = t, \phi = t$ مشخص می شود از $t = 0$ تا $t = 1$ حساب کنید.

  پ: روی کره دوبعدی طول بردارهای مماس $\mathbf{e}_\theta$ و $\mathbf{e}_\phi$ را حساب کنید.

- **تمرین:** یک کره دو بعدی به شعاع یک در نظر بگیرید. با مختصات موضعی (θ, ϕ) متریک روی کره عبارت است از: $ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$. بر حسب مختصات استریوگرافیک، (X_N, Y_N) این متریک به چه صورتی نوشته می شود؟

۱.۶ متریک القایی

همانطور که گفتیم روی یک خمینه می توان متریک های متفاوتی را تعریف کرد. چنانکه خواهیم دید، متریک خصوصیات هندسی خمینه را تعیین می کند. وقتی که یک سطح را در فضای سه بعدی (یا در حالت کلی تر یک خمینه را در فضای دکارتی غوطه ور می کنیم)، یک متریک مشخص و یکتا متریکی است که از فضای دکارتی روی سطح القا می شود. از نظر شهودی این متریک به این صورت تعریف می شود که دو بردار مماس را به عنوان بردارهایی در فضای دکارتی در نظر می گیریم و همان ضرب دکارتی یا اقلیدسی را به عنوان ضرب داخلی بردارهای روی خمینه در نظر می گیریم. فرض کنید که مختصات موضعی روی خمینه عبارت اند از $(u^1, u^2 \cdots u^n)$ و در نتیجه هر نقطه روی خمینه با یک بردار به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{r}(u) = X^i \hat{x}_i \qquad (۷۳)$$

که در آن $\mathbf{x}_i$ ها بردارهای یکه فضای دکارتی با خاصیت $\mathbf{x}_i \cdot \mathbf{x}_j = \delta_{i,j}$ هستند. در این صورت خواهیم داشت:

$$g_{mn} = \mathbf{e}_m \cdot \mathbf{e}_n \equiv \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^m} \cdot \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u^n} = \frac{\partial X^i}{\partial u^m}\hat{x}_i \cdot \frac{\partial X^j}{\partial u^n}\hat{x}_j = \frac{\partial X^i}{\partial u^m}\frac{\partial X^j}{\partial u^n}\hat{x}_i \cdot \hat{x}_j, \qquad (۷۴)$$

و یا

$$g_{mn} = \frac{\partial X^i}{\partial u^m}\frac{\partial X^i}{\partial u^n}. \qquad (۷۵)$$

این متریک را متریک القایی [۲۴] می نامند.

مثال: متریک القایی روی کره دوبعدی. در کره دو بعدی به شعاع یک می دانیم که

$$\mathbf{r} = \sin\theta\cos\phi\,\hat{x} + \sin\theta\sin\phi\,\hat{y} + \cos\theta\,\hat{z}. \qquad (۷۶)$$

و در نتیجه

$$\mathbf{e}_\theta \;=\; \cos\theta\cos\phi\,\hat{x} + \cos\theta\sin\phi\,\hat{y} - \sin\theta\,\hat{z}$$

[۲۴] Induced Metric

$$\mathbf{e}_\phi = -\sin\theta\sin\phi\,\hat{x} + \sin\theta\cos\phi\,\hat{y}. \quad (۷۷)$$

بنابراین با توجه به رابطه (۷۴) بدست می آوریم:

$$\begin{aligned} g_{\theta\theta} &= \mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\theta = 1,\\ g_{\theta\phi} &= \mathbf{e}_\theta\cdot\mathbf{e}_\phi = 0,\\ g_{\phi\phi} &= \mathbf{e}_\phi\cdot\mathbf{e}_\phi = \sin^2\theta, \end{aligned} \quad (۷۸)$$

که به معنای رابطه زیر است:

$$ds^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2. \quad (۷۹)$$

۲.۶ همبندی سازگار با متریک

ما تا کنون همبندی یا همان علایم کریستوفل را چنان تعریف کرده ایم که به نظر یکتا می آید. دلیل اش هم واقعاً این است که این همبندی را با توجه به نشاندن خمینه در فضای دکارتی تعریف کرده ایم. در حالت کلی لزومی ندارد که همبندی به این صورت تعریف شود و کافی است که همبندی خواص معینی را داشته باشد. این کار را در انتهای درس انجام می دهیم. فعلا کافی است که به یاد بسپاریم در حالت کلی هبمندی یا علایم کریستوفل یکتا نیستند. در این بخش به یک همبندی خاص که دارای اهمیت است توجه می کنیم و آن همبندی سازگار با متریک [۲۵] است. منظور از چنین همبندی ای این است که مشتق هموردای متریک برابر با صفر باشد. به عبارت بهتر می خواهیم که شرط زیر برقرار باشد:

$$g_{ij;m} = 0 \quad (۸۰)$$

از آنجا که می دانیم $g_{ij} = \mathbf{e}_i\cdot\mathbf{e}_j$ این خاصیت به این معناست که ضرب داخلی بردارهای پایه در اثر انتقال موازی تغییر نمی کند. این خاصیت به ما اجازه می دهد که علائم کریستوفل را بر حسب متریک بدست آوریم. برای این کار، با توجه به قاعده مشتق هموردا برای تانسورها می نویسیم:

$$g_{ij,m} - \Gamma^l{}_{im} g_{lj} - \Gamma^l{}_{mj} g_{il} = 0 \quad (۸۱)$$

در این رابطه متریک بر حسب علایم کریستوفل نوشته شده است. اما می توانیم این رابطه را وارونه کنیم و علایم کریستوفل را بر حسب متریک بنویسیم. برای این کار رابطه بالا را با جایگشتی از اندیس ها به شکل های زیر می نویسیم:

[۲۵] Metric-Compatible Connection

$$\begin{aligned} g_{ij,m} &= \Gamma_{jim} + \Gamma imj, \\ g_{im,j} &= \Gamma_{mij} + \Gamma ijm, \\ g_{mj,i} &= \Gamma_{jmi} + \Gamma mij. \end{aligned} \qquad (۸۲)$$

حال از تقارن متریک و هم چنین تقارن علایم کریستوفل یعنی روابط

$$g_{ij} = g_{ji} \qquad \Gamma_{kij} = \Gamma_{kji}$$

استفاده می کنیم و به رابطه زیر می رسیم:

$$g_{ij,m} - g_{im,j} - g_{mj,i} = -2\Gamma_{mij} \qquad (۸۳)$$

و یا پس از مرتب کردن

$$\Gamma_{mij} = \frac{1}{2}\Big[g_{mi,j} + g_{mj,i} - g_{ij,m}\Big]. \qquad (۸۴)$$

با بالابردن اندیس ها در دو طرف به رابطه زیر می رسیم:

$$\Gamma^m{}_{ij} = \frac{1}{2}g^{mk}\Big[g_{ki,j} + g_{kj,i} - g_{ij,k}\Big] \qquad (۸۵)$$

■ **تمرین:** الف: با استفاده از رابطه بالا علایم کریستوفل را برای سطح کره دو بعدی حساب کنید.

ب: هم چنین علایم کریستوفل را برای سطح چنبره دوبعدی حساب کنید.

■ **تمرین:** الف: در صفحه دوبعدی و با مختصات موضعی دکارتی یعنی (x, y) متریک اقلیدسی به صورت زیر است:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2. \qquad (۸۶)$$

برای این متریک علائم کریستوفل را حساب کنید و نشان دهید که همه آنها برابر با صفر هستند.

بـ حال برای همان صفحه مختصات قطبی (r, θ) به کار ببرید و علائم کریستوفل را حساب کنید.

پـ می دانیم که علائم کریستوفل تانسوری نیستند و بنابراین اگر در یک مختصات صفر باشند، به این معنا نیست که در مختصات دیگر

نیز صفر خواهند بود. از رابطه تبدیل مولفه های علائم کریستوفل استفاده کنید و نشان دهید که نتایجی که در الف بدست آوردید با نتایجی که در ب بدست آوردید سازگارند.

با استفاده از رابطه بالا علایم کریستوفل را برای سطح کره دو بعدی حساب کنید.

ب: هم چنین علایم کریستوفل را برای سطح چنبره دوبعدی حساب کنید.

۷ منحنی های ژئودزی

در این بخش می خواهیم مفهوم خط راست را از فضای اقلیدسی به فضاهای خمیده تعمیم دهیم. برای این کار باید ببینیم که خط راست در فضای اقلیدسی چه ویژگی ای دارد. سپس از این ویژگی ها کمک برای این تعمیم استفاده می کنیم. نتیجه این تعمیم را در فضاهای خمیده دیگر خط راست نمی نامیم بلکه آن را منحنی ژئودزی [۲۶] می نامیم. برای خط راست دو ویژگی می شناسیم:

یک : خط راست دارای این خاصیت است که اگر بردارهای مماس بر منحنی در نقاط مختلف با هم همراستا هستند. به عبارت دیگر اگر از بردار مماس بر منحنی در راستای خودِ خط راست مشتق بگیریم، حاصل بازهم با بردار مماس همراستاست. دقت کنید که این بردارهای مماس تنها با هم همراستا هستند نه این که با هم مساوی باشند.

دو : خط راست کوتاه ترین خط بین دو نقطه است.

نخست به ویژگی یک توجه می کنیم. در فضای اقلیدسی یک پارامتربندی از خط راست چنین است:

$$x = \alpha t + x_0 \qquad y = \beta t + y_0, \qquad z = \gamma t + z_0 \tag{۸۷}$$

این معادلات پارامتی خط راستی را نشان می دهد که در امتداد بردار $\mathbf{v} = (\alpha, \beta, \gamma)$ از نقطه (x_0, y_0, z_0) عبور می کند. بردار مماس بر این خط در هر نقطه عبارت است از:

$$\mathbf{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) = (\alpha, \beta, \gamma)$$

[۲۶] Geodesic Curve

. این بردار مماس یک بردار ثابت است و بستگی به پارامتر t ندارد. این ویژگی چیزی است که خط راست را از یک منحنی متمایز می کند. البته این نتیجه گیری کمی عجولانه است، چرا که با تغییر پارامتر $t = \tau^2$ بردار مماس بر منحنی در هر نقطه برابر خواهد شد با:

$$\mathbf{u} = (\frac{dx}{d\tau}, \frac{d}{y\tau}, \frac{dz}{d\tau}) = (2\alpha\tau, 2\beta\tau, 2\gamma\tau),$$

که دیگر یک بردار ثابت نیست. اما مهم این است که این بردار ها در نقاط مختلط خط راست با هم همراستا هستند. به عبارت دیگر هر نوع پارامتر بندی که برای این خط راست به کار ببریم نتیجه اش این است که

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\tau} \propto \mathbf{u}. \tag{۸۸}$$

یعنی مشتق بردار مماس در هر نقطه ای موازی با بردار مماس است. این آن ویژگی ای است که باید تعمیم اش دهیم. همین تعریف را برای توصیف خط راست در یک فضای خمیده نیز به کار می بریم. یک منحنی با معادله $\gamma(t) = (u^\mu(t))$ در نظر می گیریم. بردار مماس بر این منحنی عبارت است از:

$$v^\mu(t) = \dot{x^\mu} \equiv \frac{dx^\mu}{dt}. \tag{۸۹}$$

مشتق این بردار در امتداد منحنی که با همان بردار مماسِ v^μ تعریف می شود، به صورت زیر محاسبه می شود:

$$v^\mu v^\alpha_{;\mu} = \dot{x}^\mu ({v^\alpha}_{,\mu} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta} v^\beta) = \ddot{x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\dot{x^\mu}\dot{x^\beta} \tag{۹۰}$$

بنابراین معادله خط راست یا ژئودزی چنین است:

$$v^\mu v^\alpha_{;\mu} = \lambda v^\alpha \tag{۹۱}$$

و یا

$$\ddot{x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\dot{x^\mu}\dot{x^\beta} = \lambda \dot{x^\alpha}. \tag{۹۲}$$

می توان نشان داد که همواره یک پارامتربندی از منحنی وجود دارد که ضریب λ را برابر با صفر کند. چنین پارامتری را پارامتر آفین [۲۷] می نامیم. بنابراین معادله ژئودزی در پارامتربندی آفین به صورت زیر است:

$$\ddot{x^\alpha} + \Gamma^\alpha_{\mu\beta}\dot{x^\mu}\dot{x^\beta} = 0. \tag{۹۳}$$

[۲۷] Affine Parameter

حال به ویژگی دوم توجه می کنیم و آن را به فضای خمیده تعمیم می دهیم. در روی یک سطح یا در فضای سه بعدی خط راست را چگونه تعریف می کنیم؟ پاسخ این است که خط راست کوتاه ترین مسیر بین دو نقطه است. همین تعریف را نیز برای خط راست روی فضاهای خمیده به کار می بریم و البته نام دیگری برای خط راست در این فضاها انتخاب می کنیم و آنها را خطوط ژئودزی می نامیم. بنابراین یک خط یا منحنی ژئودزی دارای این خاصیت است که از بین تمامی منحنی هایی که دو نقطه معین را به هم وصل می کند، وردش طول این منحنی نسبت به تغییرات کوچک برابر با صفر است. به طور شهودی می توانید این موضوع را برای منحنی های روی کره امتحان کنید. منحنی های ژئودزی روی کره قسمت هایی از دایره های عظیمه هستند. در حالت کلی می دانیم که طول یک منحنی به صورت زیر بدست می آید:

$$S(\gamma) = \int_0^1 ds = \int_0^1 \sqrt{g_{mn}(u)\dot{u}_m\dot{u}_n}dt = \int_0^1 \mathcal{L}[u(t),\dot{u}(t)]dt, \qquad (۹۴)$$

که در آن

$$\mathcal{L}[u(t),\dot{u}(t)] = \sqrt{g_{mn}(u)\dot{u}_m\dot{u}_n}.$$

دقت کنید که همواره می توانیم پارامتر t برای منحنی را بین صفر و یک اختیار کنیم اگر چه این موضوع در اثباتی که در پی می آید نقشی ندارد. معنای این که وردش طول منحنی یعنی S نسبت به تغییرات کوچک در اطراف ژئودزی برابر با صفر باشد به این معناست که تا درجه اول از $\eta(t)$ داشته باشیم:

$$\int_0^1 \mathcal{L}[u(t)+\eta(t),\dot{u}(t)+\dot{\eta}(t)] - \mathcal{L}[u(t),\dot{u}(t)]dt = 0 \qquad (۹۵)$$

از حساب وردش ها می دانیم که این تقاضا به این معناست که:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{u}^m}) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u^m} = 0, \qquad \forall\, m. \qquad (۹۶)$$

ممکن است وجود رادیکال در عبارت $\mathcal{L}$ کمی محاسبات را سخت کند. بنابراین فعلا محاسبه را برای $L = \mathcal{L}^2 = g_{mn}(u)\dot{u}_m\dot{u}_n$ انجام می دهیم. کمی بعد تفاوتی را که ایجاد می شود در قالب یک تمرین یاد خواهیم گرفت. بنابراین فعلا قرار می دهیم:

$$L = \frac{1}{2}g_{mn}(u)\dot{u}_m\dot{u}_n. \qquad (۹۷)$$

یک محاسبه ساده نشان می دهد که

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^m} = g_{mn}\dot{u}^n \qquad (۹۸)$$

و

$$\frac{\partial L}{\partial u^m} = \frac{1}{2} g_{kl,m}\dot{u}^k\dot{u}^l \tag{۹۹}$$

در نتیجه معادله (۹۶) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{d}{dt}(g_{mn}\dot{u}^n) = \frac{1}{2} g_{kl,m}\dot{u}^k\dot{u}^l \tag{۱۰۰}$$

و یا

$$g_{mn,k}\dot{u}^k\dot{u}^n + g_{mn}\ddot{u}^n = \frac{1}{2} g_{kl,m}\dot{u}^k\dot{u}^l \tag{۱۰۱}$$

از آنجا که در طرف چپ $\dot{u}^k\dot{u}^n$ نسبت به تعویض اندیس های (k,n) متقارن است، اندیس های متریک را نیز متقارن می کنیم و می نویسیم:

$$\frac{1}{2} g_{mn,k}\dot{u}^k\dot{u}^n + \frac{1}{2} g_{mk,n}\dot{u}^k\dot{u}^n + g_{mn}\ddot{u}^n = \frac{1}{2} g_{kl,m}\dot{u}^k\dot{u}^l \tag{۱۰۲}$$

اما با جابجایی جملات و مرتب کردن آنها و هم چنین با توجه به رابطه علایم کریستوفل و متریک در می یابیم که:

$$\ddot{u}^m + {\Gamma^m}_{i,j}\dot{u}^i\dot{u}^j = 0 \tag{۱۰۳}$$

این رابطه معادله نهایی یک ژئودزی یا به اصطلاح کوتاه ترین منحنی بین دو نقطه را با پارامتر بندی آفین بدست می دهد.

■ **تمرین:** الف: نشان دهید که اگر به جای L از $\mathcal{L} = \sqrt{L}$ در معادله وردش استفاده کنیم، به معادله زیر می رسیم:

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial L}{\partial \dot{u}^m}) - \frac{\partial L}{\partial u^m} = \frac{1}{2}\dot{L}L^{-1}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^m}, \qquad \forall\, m. \tag{۱۰۴}$$

این رابطه نشان می دهد که اگر پارامتربندی منحنی چنان باشد که در آن L مقدار ثابتی باشد، آنگاه طرف دوم این منحنی برابر با صفر شده و این معادله تبدیل به همان معادله ژئودزی در پارامتربندی آفین خواهد شد. اما اگر به تعریف $L = g_{mn}\frac{dx^m}{dt}\frac{dx^n}{dt}$ توجه کنیم در می یابیم که هرگاه dt متناسب با ds باشد، آنگاه L مقدار ثابتی خواهد داشت و مشتق آن برابر با صفر خواهد شد. یعنی چنین پارامتری پارامتر آفین است.

■ **تمرین:** الف: برای یک کره به شعاع R و با متریکی که از فضای سه بعدی روی آن القا می شود داریم:

$$L = \frac{1}{2}\left(R^2\dot{\theta}^2 + R^2\sin^2\theta\dot{\phi}^2\right) \qquad (۱۰۵)$$

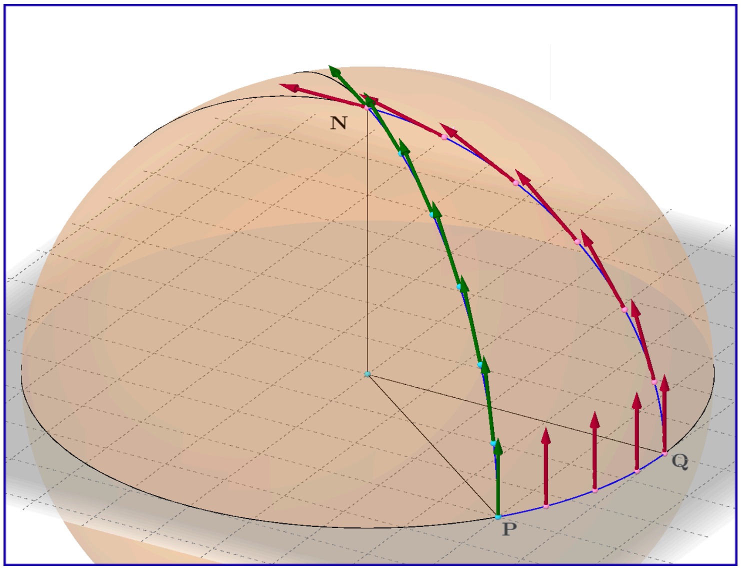
معادله (۹۶) را بنویسید و از روی آن علایم کریستوفل را بخوانید. این راه یک راه ساده برای بدست آوردن علایم کریستوفل برای هر خمینه ای است.

ب: نشان دهید که یک دایره عظیمه که از قطب شمال و جنوب می گذرد یک منحنی ژئودزی است. با توجه به تقارن کره این موضوع نشان می دهد که هر دایره عظیمه ای روی سطح کره یک منحنی ژئودزی است.

۸ انحنا و تانسور ریمان

چگونه می توانیم میزان انحنای یک سطح یا به طور کلی انحنای یک خمینه را مشخص کنیم. نخست باید توجه کنیم که انحنای یک سطح یک کمیت موضعی است که می تواند نقطه به نقطه تغییر کند. یک سطح ممکن است در همسایگی یک نقطه کاملا تخت و در همسایگی یک نقطه دیگر دارای انحنای خیلی زیاد باشد. هم چنین باید توجه کنیم که هیچ کدام از کمیت هایی مثل متریک یا علایم کریستوفل نمی توانند انحنای یک سطح یا خمینه را مشخص کنند. سطح صاف دو بعدی اقلیدسی وقتی که مختصات قطبی (r, θ) را برای آن انتخاب می کنیم متریکی دارد که ثابت نیست و عناصر کریستوفل آن نیز برابر با صفر نیستند، با این وجود می دانیم که این سطح کاملا صاف است. برای آنکه بتوانیم میزان انحنای یک سطح را مشخص کنیم می بایست احساس شهودی خود را تبدیل به یک رابطه ریاضی کنیم. این احساس شهودی از راه انتقال موازی بردارها حاصل می شود. روی یک صفحه تخت اگر یک بردار را از دو مسیر متفاوت به یک نقطه انتقال موازی دهیم نتیجه یکسان است. یعنی حاصل انتقال موازی ربطی به مسیر ندارد. اما روی یک سطح خمیده مثل کره حاصل انتقال موازی روی این دو مسیر یکسان نیست و در واقع هر چه که انحنای سطح بیشتر باشد تفاوت بیشتری در بردارهای انتقال موازی داده شده وجود خواهد داشت. شکل (۱۲) [۲۸] این تفاوت را به خوبی نشان می دهد. هم چنین هر چه که سطح محصور بین دو مسیر موازی بزرگ تر باشد، تفاوت این دو بردار نیز بیشتر خواهد بود.

[۲۸] This figure is taken from: https://physics.stackexchange.com/questions/590244/what-is-the-drawing-scheme-of-the-parallel-transport-of-a-vector



شکل ۱۲: انتقال موازی یک بردار از دو مسیر متفاوت روی کره.

با توجه به آنچه که در بخش (۵) در باره رابطه ای انتقال موازی با مشتق هموردای بردار ها توضیح دادیم، معنای دیگر این مفهوم این است که انحنا مربوط است به جابجا نشدن مشتق های هموردای بردارها یا هم-بردارها در دو جهت متفاوت. فرقی نمی کند که استدلال را برای فرم ها انجام دهیم یا برای بردارها. در اینجا روابط را برای فرم ها می نویسیم. برای یک فرم $\lambda = \lambda_a e^a$ داریم:

$$\lambda_{a;b} = \lambda_{a,b} - \Gamma^d{}_{ab}\lambda_d \tag{۱۰۶}$$

طرف چپ یک تانسور رتبه (۰،۲) است. یک بار دیگر از آن مشتق می گیریم اما در یک جهت متفاوت. نتیجه یک تانسور رتبه (۰،۳) است.

$$\begin{aligned}
\lambda_{a;b;c} &= (\lambda_{a;b})_{,c} - \Gamma^e{}_{ac}\lambda_{e;b} - \Gamma^e{}_{bc}\lambda_{a;e} \\
&= \lambda_{a,b,c} - \Gamma^d{}_{ab,c}\lambda_d - \Gamma^d{}_{ab}\lambda_{d,c} - \Gamma^e{}_{ac}(\lambda_{e,b} - \Gamma^d{}_{eb}\lambda_d) - \Gamma^e{}_{bc}(\lambda_{a,e} - \Gamma^d{}_{ae}\lambda_d) \qquad (۱۰۷)
\end{aligned}$$

حال جای اندیس های (c،b) را عوض می کنیم و دو تانسور را از هم کم می کنیم. نتیجه بازهم یک تانسور است. یک مشاهده ساده معلوم می کند که می توان این تفاضل را به صورت زیر نوشت:

$$\lambda_{a;b;c} - \lambda_{a;c;b} = R^d{}_{abc}\lambda_d \tag{۱۰۸}$$

که در آن

$$R^d{}_{abc} = \partial_b \Gamma^d{}_{ac} - \partial_c \Gamma^d{}_{ab} + \Gamma^e{}_{ac}\Gamma^d{}_{eb} - \Gamma^e{}_{ab}\Gamma^d{}_{ec} \tag{۱۰۹}$$

یک تانسور رتبه (۱،۳) موسوم به تانسور ریمان است. دقت کنید که طرف راست (۱۰۸) متناسب با خود بردار است و نه مشتقات آن. به این ترتیب تانسور ریمان، تانسوری است که نشان می دهد تفاوت مشتق هموردا در دو مسیر بی نهایت کوچک چه تناسبی با خود آن بردار و ابعاد آن مسیرها دارد. به عبارت دیگر تانسور ریمان میزان انحنا را در یک همسایگی تعریف می کند.

همانطور که می بینیم تانسور ریمان یک تانسور رتبه چهار است و در فضای d بعدی به نظر می رسد که دارای d^4 مولفه است. مثلا در بعد 4 تعداد مولفه های تانسور ریمان ۲۵۶ تا خواهد بود. اما نکته این است که همه این مولفه ها مستقل از هم نیستند. تانسور ریمان تقارن هایی دارد و در اتحادهایی صدق می کند که تعداد مولفه های مستقل را به شدت کاهش می دهد. به عنوان مثال تعداد مولفه های مستقل تانسور ریمان در بعد $d = 4$ تنها ۲۰ تاست. اکنون به این اتحادها و تقارن های تانسور ریمان می پردازیم.

- **اتحاد اول بیانکی:** یک محاسبه ساده نشان می دهد که تانسور ریمان در رابطه زیر صدق می کند.

$$R^a{}_{bcd} + R^a{}_{cdb} + R^a{}_{dbc} = 0 \tag{۱۱۰}$$

این رابطه اتحاد اول بیانکی نام دارد. از آنجا که این اتحاد یک رابطه جبری بین مولفه های تانسور ریمان است، تعداد مولفه های مستقل تانسور ریمان را کم می کند.

- **تمرین:** اتحاد اول بیانکی را می توان با محاسبه مستقیم از رابطه (۱۱۷) و توجه به تقارن های علایم کریستوفل نشان داد. این محاسبه را انجام دهید.

می توانیم با استفاده از متریک همه اندیس ها را پایین بیاوریم:

$$R_{abcd} = g_{ae}R^e{}_{bcd} \tag{۱۱۱}$$

در این صورت تانسور زیر را خواهیم داشت:

$$R_{abcd}=\frac{1}{2}\big(\partial_d\partial_a g_{bc}-\partial_d\partial_b g_{ac}+\partial_c\partial_b g_{ad}-\partial_c\partial_a g_{bd}\big)-\Gamma^f{}_{ac}\Gamma_{fbd}+\Gamma^f{}_{ad}\Gamma_{fbc} \qquad (۱۱۲)$$

وقتی که تانسور ریمان را به این شکل می نویسیم تقارن های بیشتری در آن می بینیم. از جمله متوجه می شویم که:

$$\begin{aligned} R_{abcd}&=-R_{bacd}\\ R_{abcd}&=-R_{abdc}\\ R_{abcd}&=R_{cdab}. \end{aligned} \qquad (۱۱۳)$$

این تقارن ها بعلاوه رابطه (۱۱۰) تعداد مولفه های مستقل تانسور ریمان را کاهش می دهد.

- **تمرین:** ثابت کنید که برای یک خمینه d بعدی تعداد مولفه های مستقل تانسور ریمان برابر است با: $\frac{d^2(d^2-1)}{12}$. بنابراین برای یک کره دو بعدی تانسور ریمان تنها یک مولفه مستقل دارد.

- **تمرین:** کره دو بعدی را در نظر بگیرید: تنها مولفه مستقل تانسور ریمان برابر است با: $R_{\theta,\phi,\theta,\phi}$. مقدار این مولفه را محاسبه کنید.

- **تمرین:** الف: سطح دو بعدی R^2 را با مختصات دکارتی (x,y) در نظر بگیرید. متریک روی این سطح را $ds^2=dx^2+dy^2$ بگیرید و تانسور ریمان را برای این سطح حساب کنید.
ب: همان سطح دوبعدی قبلی را با همان متریک در نظر بگیرید ولی این بار مختصات قطبی (r,θ) به کار ببرید. نمادهای کریستوفل را حساب کنید و سپس تانسور ریمان را تعیین کنید. نتیجه باز هم باید یک تانسور صفر باشد. یعنی همه مولفه هایش برابر با صفر باشد.

- **تمرین:** برای سطح چنبره دوبعدی تانسور ریمان را حساب کنید.

۱.۸ تانسور ریچی

تانسور ریمان یک تانسور مرتبه ۴ است. از روی این تانسور و با ادغام کردن دو تا از اندیس ها می توان یک تانسور مرتبه دو موسوم به تانسور ریچی ساخت. به دلیل روابط تقارنی (۱۱۳) تنها به یک روش می توان این ادغام را انجام داد. به همین دلیل تانسور ریچی به صورت زیر تعریف می شود:

$$R_{ab}:=R^c{}_{abc} \qquad (۱۱۴)$$

از این تانسور می توان یک کمیت اسکالر نیز به صورت زیر ساخت که اسکالر ریچی خوانده می شود:

$$R = g^{ab}R_{ab} = R^a_a. \tag{۱۱۵}$$

■ **تمرین:** الف: برای کره دوبعدی تانسور و اسکالر ریچی را حساب کنید.

ب:همین محاسبه را برای یک چنبره نیز انجام دهید.

تانسور ریچی یک تانسور متقارن است. برای دیدن این ویژگی می بایست از هر سه تقارن تانسور ریمان استفاده کنیم. در این صورت خواهیم داشت:

$$R_{ab} = R^m{}_{abm} = g^{mn}R_{nabm} = g^{mn}R_{bmna} = g^{mn}R_{mban} = R_{ba}. \tag{۱۱۶}$$

می توانیم صورت صریح تانسور ریچی را با استفاده از تانسور ریمان بدست آوریم:

$$R_{ab} = R^d{}_{abd} = \partial_b\Gamma^d{}_{ad} - \partial_d\Gamma^d{}_{ab} + \Gamma^e{}_{ad}\Gamma^d{}_{eb} - \Gamma^e{}_{ab}\Gamma^d{}_{ed}. \tag{۱۱۷}$$

■ **تمرین:** می دانیم که عناصر کریستوفل نسبت به مولفه های دوم و سوم خود متقارن هستند. با استفاده از این ویژگی و عبارت بالا برای تانسور ریچی به طور صریح ثابت کنید که تانسور ریچی نسبت به دو اندیس خود متقارن است.

■ **اتحاد دوم بیانکی:** اتحاد اول بیانکی یک رابطه بین مولفه های تانسور ریمان در یک نقطه است. این که مولفه های تانسور ریمان در نقطه های نزدیک به هم در یک خمینه چه رابطه ای با هم دارند، توسط اتحاد دوم بیانکی بیان می شود. این اتحاد به صورت زیر است:

$$R^\lambda{}_{\mu\nu\alpha;\beta} + R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta;\nu} + R^\lambda{}_{\mu\beta\nu;\alpha} = 0. \tag{۱۱۸}$$

این رابطه به صورت زیر ثابت می شود: مشتق هموردای حاصل ضرب دو بردار را حساب می کنیم و می نویسیم:

$$(A_\mu B_\nu)_{;\alpha} = A_{\mu;\alpha}B_\nu + A_\mu B_{\nu;\alpha}. \tag{۱۱۹}$$

از دو طرف این رابطه بازهم مشتق می گیریم:

$$(A_\mu B_\nu)_{;\alpha;\beta} = A_{\mu;\alpha;\beta}B_\nu + A_{\mu;\alpha}B_{\nu;\beta} + A_{\mu;\beta}B_{\nu;\alpha} + A_\mu B_{\nu;\alpha;\beta}. \tag{۱۲۰}$$

جای دو اندیس α و β را عوض می کنیم:

$$(A_\mu B_\nu)_{;\beta;\alpha} = A_{\mu;\beta;\alpha}B_\nu + A_{\mu;\beta}B_{\nu;\alpha} + A_{\mu;\alpha}B_{\nu;\beta} + A_\mu B_{\nu;\beta;\alpha}. \tag{۱۲۱}$$

این دو رابطه را از هم کم می کنیم، بعضی از جملات حذف می شوند و از تعریف تانسور ریمان هم استفاده می کنیم تا به رابطه زیر برسیم:

$$(A_\mu B_\nu)_{;\alpha;\beta} - (A_\mu B_\nu)_{;\beta;\alpha} = R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} A_\lambda B_\nu + R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta} A_\mu B_\lambda. \qquad (۱۲۲)$$

این رابطه برای یک تانسور رتبه دو خاص نوشته شده که حاصل ضرب دو بردار است. اما هر تانسور رتبه دو ترکیبی خطی از این نوع حاصل ضرب هاست. به عبارت دیگر هر تانسور رتبه دو به صورت $T_{\mu\nu} = A_\mu B_\nu + C_\mu D_\nu + \cdots$ قابل نوشتن است. با توجه به خطی بودن تمام روابط می توانیم این رابطه را برای هر تانسور رتبه دوم بنویسیم:

$$T_{\mu\nu;\alpha;\beta} - T_{\mu\nu;\beta;\alpha} = R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} T_{\lambda\nu} + R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta} T_{\mu\lambda}. \qquad (۱۲۳)$$

حال می توانیم فرض کنیم که $T_{\mu\nu}$ خود مشتق یک بردار است، یعنی $T_{\mu\nu} = A_{\mu;\nu}$. در نتیجه اخرین رابطه ای که نوشتیم به صورت زیر در می آید:

$$A_{\mu;\nu;\alpha;\beta} - A_{\mu;\nu;\beta;\alpha} = R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta} A_{\lambda;\nu} - R^\lambda{}_{\nu\alpha\beta} A_{\mu;\lambda}. \qquad (۱۲۴)$$

هرگاه اندیس های ν, α, β را به صورت دوره ای تغییر دهیم و روابط بدست آمده را همه با هم جمع کنیم و از اتحاد اول بیانکی نیز استفاده کنیم به رابطه زیر می رسیم:

$$\Big(R^\lambda{}_{\mu\nu\alpha;\beta} + R^\lambda{}_{\mu\alpha\beta;\nu} + R^\lambda{}_{\mu\beta\nu;\alpha}\Big) A_\lambda = 0 \qquad (۱۲۵)$$

از آنجا که این رابطه برای هر بردارِ A درست است نتیجه می گیریم که عبارت داخل پرانتز برابر با صفر است و این همان اتحاد دوم بیانکی است.

می دانیم که تانسور ریچی از ادغام دو تا از اندیس های تانسور ریمان بدست می آید. بنابراین طبیعی است که اتحادهای اول و دوم بیانکی منجر به قیودی روی تانسور ریچی نیز بشوند. در این جا می خواهیم این قیود را بدست آوریم. نخست به اتحاد اول بیانکی یعنی رابطه (۱۱۰) نگاه می کنیم. با ادغام اندیس های a و d از این رابطه بدست می آوریم:

$$R_{bc} + R^a{}_{cab} + R^a{}_{abc} = 0. \qquad (۱۲۶)$$

اما از تقارن های تانسور ریمان می دانیم که جمله آخر برابر با صفر و جمله وسط برابر است با $-R_{cb}$. بنابراین نتیجه می گیریم که تانسور ریچی یک تانسور متقارن است، یعنی

$$R_{bc} = R_{cb}. \tag{۱۲۷}$$

حال به اتحاد دوم بیانکی یعنی رابطه (۱۱۸) توجه می کنیم: در این رابطه اندیس های λ و β را ادغام می کنیم (یعنی آنها را مساوی قرار داده و روی آنها جمع می زنیم) و به رابطه زیر می رسیم:

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\alpha;\lambda} + R^{\lambda}{}_{\mu\alpha\lambda;\nu} + R^{\lambda}{}_{\mu\lambda\nu;\alpha} = 0, \tag{۱۲۸}$$

یا با توجه به تعریف تانسور ریچی $R_{\mu\nu} = R^{\lambda}{}_{\mu\nu\lambda}$

$$R^{\lambda}{}_{\mu\nu\alpha;\lambda} + R_{\mu\alpha;\nu} - R_{\mu\nu;\alpha} = 0, \tag{۱۲۹}$$

با توجه به این که $g_{\mu\nu;\alpha} = 0$ است، می توانیم با خیال راحت اندیس تانسورها را حتی وقتی داخل مشتق هستند نیز بالا یا پایین ببریم و آنها را با هم ادغام کنیم. بنابراین در این رابطه می توانیم اندیس μ و ν را ادغام کنیم تا به رابطه زیر برسیم:

$$R^{\lambda}{}_{\alpha;\lambda} + R^{\mu}_{\mu\alpha} - R_{;\alpha} = 0, \tag{۱۳۰}$$

که می توان آن را به صورت ساده زیر نوشت:

$$2R^{\lambda}{}_{\alpha;\lambda} - R_{;\alpha} = 0. \tag{۱۳۱}$$

این رابطه را به صورت زیر نیز می توان بازنویسی کرد:

$$(2R^{\lambda\alpha} - g^{\lambda\alpha}R)_{;\lambda} = 0. \tag{۱۳۲}$$

طرف چپ یک تانسور جدید معرفی می کند که آن را تانسور اینشتین می خوانیم:

$$G^{\lambda\alpha} := R^{\lambda\alpha} - \frac{1}{2}g^{\lambda\alpha}R, \qquad \longrightarrow \qquad G^{\lambda\alpha}{}_{;\lambda} = 0. \tag{۱۳۳}$$

این که چرا در جستجوی تانسوری مثل $G_{\alpha\beta}$ بودیم، دلیل اش یک دلیل فیزیکی است و آن اینکه این تانسور در یک رابطه پیوستگی صدق می کند. در فصل بعدی که با معادله گرانش اینشتین آشنا خواهیم شد، بیشتر در این باره یاد خواهیم گرفت.

مرور کوتاه ما به هندسه دیفرانسیل اینجا به پایان می رسد. طبیعی است که خواننده ای که بخواهد آشنایی بیشتری با این موضوع پیدا کند می بایست به کتاب های هندسه دیفرانسیل یا هندسه خمینه ها مراجعه کند. در آخرین بخش این درس، همانطور که در ابتدا گفتیم، به بررسی تعاریف اساسی از دیدگاه ذاتی می پردازیم.

۹ مسئله ها:

- **مسئله اول:** سطح یک بیضی گون با معادله

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$$

توصیف می شود. هر نقطه از این بیضی گون را با دو پارامتر توصیف کنید. بردارهای پایه فضای مماس یعنی $\mathbf{e}_1$ و $\mathbf{e}_2$ را در هر نقطه بدست آورید. بردارهای $\mathbf{e}^1$ و $\mathbf{e}^2|$ را محاسبه کنید. هم چنین متریک القا شده از فضای دکارتی را روی این بیضی گون مشخص کنید. وارون این متریک را نیز بدست آورید.

- **مسئله دوم:** یک سطح در فضای سه بعدی با معادلات پارامتری زیر توصیف می شود:

$$x=u+v, \quad y=u-v, \quad z=2uv. \tag{۱۳۴}$$

الف: شکل این سطح را رسم کنید.

ب: بردارهای فضای مماس را در هر نقطه بدست آورید. متریک القا شده از فضای دکارتی و هم چنین وارون این متریک را بدست آورید.

پ: بردارهای $\mathbf{e}_1, \ \mathbf{e}_2, \ \mathbf{e}^1, \ \mathbf{e}^2$ را محاسبه کنید.

- **مسئله سوم:** نشان دهید که اگر یک تانسور در یک مختصات متقارن باشد یعنی داشته باشیم $T^{ij}=T^{ji}$ آنگاه در هر مختصات دیگری هم متقارن است.

- **مسئله چهار:** نشان دهید که تحت تبدیلات دوران تانسور کاملا پادمتقارن ϵ_{ijk} مقدار خود را حفظ می کند.

■ **مسئله پنجم:** منحنی $z=x^2$ را حول محور z دوران بدهید تا یک سطح دوار بدست آید. برای این سطح بردارهای مماس را در هر نقطه بدست آورید. هم چنین متریک القا شده روی سطح را مشخص کنید. سپس همبندی سازگار با این متریک را بدست آورید.

■ **مسئله ششم:** تانسور τ^{ab} یک تانسور متقارن است و λ^a یک بردار است. (در هر دو مورد منظور البته مولفه های یک تانسور و یک بردار است.) هرگاه برای همه مولفه ها داشته باشیم:

$$\tau^{ab}\lambda^c+\tau^{bc}\lambda^a+\tau^{ca}\lambda^b=0 \tag{۱۳۵}$$

نشان دهید که یا تانسور τ صفر است یا بردار λ.

■ **مسئله هفتم:** صفحه دو بعدی مسطح را در نظر بگیرید و برای هر نقطه مختصات قطبی (r,θ) را به کار ببرید. اگر در مختصات دکارتی متریک این سطح به صورت $ds^2=dx^2+dy^2$ باشد، در مختصات قطبی متریک آن به چه صورت است؟ در این متریک علایم کریستوفل را محاسبه کنید و از روی آن تانسور ریمان را بدست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

■ **مسئله هفتم:** صفحه دو بعدی مسطح را در نظر بگیرید و برای هر نقطه مختصات قطبی (r,θ) را به کار ببرید. اگر در مختصات دکارتی متریک این سطح به صورت $ds^2=dx^2+dy^2$ باشد، در مختصات قطبی متریک آن به چه صورت است؟ در این متریک علایم کریستوفل را محاسبه کنید و از روی آن تانسور ریمان را بدست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

■ **مسئله هشتم:** روی یک چنبره مختصات θ_1و θ_2 به عنوان مختصات موضعی روی سطح در نظر گرفته شده اند. این مختصات در شکلِ مربوطه در درس نشان داده شده اند. منحنی ژئودزی روی چنبره را که نقطه با مختصات $(0,0)$ را به نقطه با مختصات $(\frac{\pi}{2},\frac{\pi}{2})$ وصل می کند بدست آورید.

■ **مسئله نهم:** سطح یک استوانه را در نظر بگیرید و برای آن مختصات (z,θ) را به کار ببرید. متریک القاشده از فضای دکارتی را روی این چنبره حساب کنید. در این متریک علایم کریستوفل را محاسبه کنید و از روی آن تانسور ریمان را بدست آورید. چه نتیجه ای می گیرید؟

■ **مسئله دهم:** نیم صفحه دو بعدی $P=\{(x,y)\ \ y>0\}$ را در نظر بگیرید. این نیم صفحه به متریک زیر مجهز است:

$$ds^2=\frac{dx^2+dy^2}{y^2}. \tag{۱۳۶}$$

علایم کریستوفل را برای این متریک بدست آورید و سپس تانسور ریمان و تانسور ریچی را حساب کنید.

۱۰ ضمیمه: نگاه ذاتی به هندسه خمینه ها

آنچه که تا اینجا بیان کردیم نوعی نگاه غیرذاتی به هندسه سطوح خمیده است به این معنا که این سطوح را در یک فضای بزرگ تر دکارتی تصور می کنیم و از دیدگاه آن فضای بزرگ تر به این سطوح نگاه می کنیم. به همین جهت است که بردارهای مماس بر سطح و فضای مماس بر سطح را نیز با توسل به آن فضای دکارتی بزرگی که این سطح در آن نشانده شده یا به اصطلاح غوطه ور شده تعریف می کنیم. این دیدگاه کسی است که بر نشانده شدن این سطح در فضای بزرگ اشراف دارد و از بیرون به آن نگاه می کند. اما دیدگاه طبیعی تر و بهتر این است که از درون سطح و از دیدگاه کسی (یا مورچه ای) که روی سطح زندگی می کند به خواص سطح نگاه کنیم. در این ضمیمه می خواهیم این دیدگاه را معرفی کنیم. البته طبیعی است که آنچه که در بخش های قبلی یاد گرفته ایم برای این که درک شهودی مناسبی از این دیدگاه پیدا کنیم مهم است. برای این که بیان خود را هرچه ملموس تر کنیم تصور کنید که مورچه ای باهوش روی سطح زندگی می کند که با مفاهیم ریاضی به خوبی آشناست، مفهوم تابع و حد و مشتق و فضای برداری را همه می فهمد، ولی از فضای بیرون و این که سطح در فضای بزرگ تری غوطه ور است هیچ گونه اطلاعی ندارد . او می فهمد که دنیای اطراف اش دو بعدی است و با نقشه کشی می تواند هر نقطه ای را با دو مختصه (u^1, u^2) مشخص کند. مفهوم تابع روی سطح را نیز می فهمد، بنابراین $f(u^1, u^2)$ برای او تابعی را تعریف می کند که از سطح به اعداد حقیقی تعریف شده است. او هم چنین می تواند پیوستگی یا مشتق پذیری توابع را تعیین کند و از انها نسبت به متغیرهایشان مشتق بگیرد. می خواهیم بفهمیم این مورچه چگونه بردارهای مماس بر سطح و هم چنین تانسورها و در نهایت مشتق هموردا را تعریف می کند. اگر او بتواند چنین چیزهایی را به خوبی تعریف کند، آنگاه می تواند به تعریف انحنا نیز دست پیدا کند.

۱.۱۰ مماس بر یک منحنی

حال باید ببینیم چگونه این مورچه مفهومی از بردار مماس بر سطح را بدون ارجاع به فضای بزرگتر تعریف کند. سطح را با M نشان می دهیم. این مورچه روی نقطه $p = (u^1, u^2)$ ایستاده است. از این نقطه منحنی های متعددی می گذرند. هر کدام از این منحنی ها با یک معادله مثل $\gamma(t) = (u^1(t), u^2(t))$ تعریف شده اند و پارامتربندی این منحنی ها نیز چنان است که در نقطه p مقدار پارامتر t برابر با صفر است. او می خواهد ببیند مشتق یک تابع حقیقیِ $f : M \longrightarrow R$

در امتداد یک منحنی مثل γ چقدر است. در امتداد این منحنی تابع f تنها تابعی از پارامتر t است، زیرا

$$f(u^1, u^2) = f(u^1(t), u^2(t)) \equiv f(t).$$

طبیعتا جوابی که بدست می آورد چنین است:

$$\frac{df}{dt} = \frac{du^1}{dt}\frac{\partial f}{\partial u^1} + \frac{du^2}{dt}\frac{\partial f}{\partial u^2}. \qquad (۱۳۷)$$

در این رابطه $\frac{\partial f}{\partial u^1}$ و $\frac{\partial f}{\partial u^2}$ هر دو در نقطه p روی سطح حساب شده اند و مستقل از منحنی γ هستند، اما ضرایب $\frac{du^1}{dt}$ و $\frac{du^2}{dt}$ بستگی به منحنی گذرنده در آن نقطه دارند. مورچه ی روی سطح سعی می کند مشتق تابع f را در جهت منحنی های دیگر مثل منحنی های $\alpha(t)$ یا $\beta(t)$ نیز حساب کند و بازهم به همین رابطه بالا می رسد با این تفاوت که در هر مورد آنچه که تغییر می کند ضرایب $\frac{du^1}{dt}$ و $\frac{du^2}{dt}$ است، چون این ضرایب بستگی به منحنی مورد نظر و در واقع جهت مورد نظر منحنی در آن نقطه دارند و آنچه که ثابت است عبارت های $\frac{\partial f}{\partial u^1}$ و $\frac{\partial f}{\partial u^2}$ است. در واقع هر مشتقی از این تابع در امتداد هر منحنی ترکیبی خطی از این دو عبارت اخیر است. از آنجا که مورچه می بیند که این کار را می تواند برای هر تابعی انجام دهد فکر می کند که بهتر است تابع f را از رابطه (۱۳۷) بردارد و آن را به شکل زیر و به صورت یک رابطه عملگری بنویسد که روی هر تابعی می تواند اثر کند:

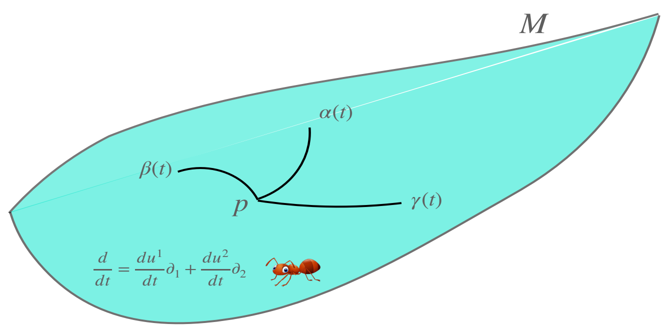
$$\frac{d}{dt} = \frac{du^1}{dt}\frac{\partial}{\partial u^1} + \frac{du^2}{dt}\frac{\partial}{\partial u^2}. \qquad (۱۳۸)$$

مشتق در امتداد منحنی های مختلف تنها باعث عوض شدن ضرایب $\frac{du^1}{dt}$ و $\frac{du^2}{dt}$ می شوند و هر مشتقی ترکیب خطی مشخصی از عبارت های $\frac{\partial}{\partial u^1}$ و $\frac{\partial}{\partial u^2}$ است. بنابراین پس از کمی تفکر مورچه به این فکر می افتد که این عملگر ها را به عنوان بردارهای پایه یک فضا تعریف کند و بگوید که تمامی ترکیب های خطی از این دو عملگر را به عنوان یک فضای برداری شناسایی می کند. این فضای برداری را با T_pM نشان می دهد و آن را فضای مماس بر سطح در نقطه p می نامد، اگر چه برای او مماس بودن این فضا بر سطح اصلا معنا و مفهومی ندارد و فقط از روی عادت یا احترام به بزرگترها این اسم را به کار می برد.

■ **تمرین:** الف: ثابت کنید که ادعای مورچه صحیح است.

ب: سپس ثابت کنید که عملگرهای ∂_i عضو T_pM هستند، یعنی خاصیت های لازم را دارند.

پ- سپس ثابت کنید که عملگرهای $\{\partial_i\}$ یک پایه برای فضای T_pM تشکیل می دهند. در نتیجه هر عضو از T_pM را می توان به صورت زیر نوشت: $\mathbf{X} = X^i\partial_i$.



شکل ۱۳: شیوه تعریف بردارها در یک خمینه. برای توضیح به متن ضمیمه مراجعه کنید. مورچه ای که روی سطح است سعی می کند مشتق یک تابع را در امتداد یک منحنی دلخواه که از نقطه p می گذرد حساب کند.

هر بردار متعلق به این فضا به صورت زیر نوشته می شود:

$$\mathbf{X} = X^1\partial_1 + X^2\partial_2 \equiv X^i\partial_i, \tag{۱۳۹}$$

که در آن ∂_i نماد خلاصه ای است برای $\frac{\partial}{\partial u^i}$. همه این مشتق ها نیز در نقطه p محاسبه می شوند. وقتی به این صورت به بردارها فکر می کنیم روابط تبدیل آنها وقتی که مختصات روی سطح را تغییر می دهیم به صورت خیلی طبیعی بدست می آیند. به عنوان مثال طبیعی است که

$$\partial_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}}\partial_i, \tag{۱۴۰}$$

و در نتیجه طبیعی است که

$$X^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i}X^i. \tag{۱۴۱}$$

اگر ϕ یک تابع یا به عبارت دیگر یک میدان اسکالر روی M باشد، مشتق آن در امتداد یک بردارِ مماس $\mathbf{X} = X^i\partial_i$ در یک نقطه مثل p برابر است با

$$\mathbf{X}_p\phi = X^i_p\partial_i\phi \tag{۱۴۲}$$

که در آن همه مشتق ها در نقطه p محاسبه می شوند. به این ترتیب یک بردارِ $X_p \in T_pM$ روی یک تابع اثر می کند و یک عدد به دست می دهد. اگر مجموعه تمام توابع مشتق پذیر یا به اصطلاح میدان های اسکالر را با $C^1(M)$ نشان دهیم، می توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{X}_p : C^1(M) \longrightarrow R. \tag{۱۴۳}$$

به عبارت دیگر یک بردار مماس در نقطه ی p کارش این است که هر تابعی را به یک عدد می نگارد. این نگاشت دارای خاصیت های زیر است:

$$\begin{aligned} \mathbf{X}_p(c\phi + \psi) &= c\mathbf{X}_p(\phi) + \mathbf{X}_p(\psi) \\ \mathbf{X}_p(\phi\psi) &= \mathbf{X}_p(\phi)\psi(p) + \phi(p)\mathbf{X}_p(\psi). \end{aligned} \tag{۱۴۴}$$

در واقع $\mathbf{X}_p(\phi)$ چیزی نیست جز مشتق میدان اسکالر ϕ در امتداد بردار $\mathbf{X}_p$. مورچه روی سطح می تواند از آنچه که قبلا توضیح دهیم نیز فراتر رود و برای دوستان خود فضای برداری مماس T_pM را به شکل خیلی مجردی تعریف کند. او می تواند بگوید که مجموعه تمام عملگرهایی که دارای خاصیت (۱۴۴) هستند تشکیل یک فضای برداری می دهند و این فضا را با T_pM نشان دهد.

■ **تمرین:** نگاشت هایی که دارای خاصیت (۱۴۴) هستند، اشتقاق [۲۹] یا به سادگی همان مشتق نامیده می شوند. ثابت کنید تمام اشتقاق ها یک فضای برداری تشکیل می دهند. (به طور دقیق نشان دهید که همه خواص یک فضای برداری برقرار هستند.)

اگر در هر نقطه از خمینه M یک بردار $\mathbf{X}_p$ تعریف کرده باشیم ، آنگاه می گوییم که یک میدان برداری روی خمینه M تعریف شده است. چنین میدانی را با $\mathbf{X}$ نشان می دهیم که دیگر اندیس p ندارد. این میدان وقتی روی یک تابع ϕ اثر می کند، در هر نقطه یک عدد حقیقی تولید می کند و در نتیجه در کل خمینه یک تابع تعریف می کند. به این ترتیب میدان برداری کارش این است که یک تابع را به تابعی دیگر می نگارد. به این ترتیب است که می نویسیم:

$$\mathbf{X} : C^1(M) \longrightarrow C^1(M). \tag{۱۴۵}$$

به این ترتیب میدان برداری هر تابعی را به یک تابع دیگر تبدیل می کند به نحوی که اولا این عمل خطی باشد ثانیا دارای خاصیت لایب نیتزی باشد به این معنا که

$$\mathbf{X}(\phi + \psi) = \mathbf{X}(\phi) + \mathbf{X}(\psi) \quad , \qquad bX(\phi\psi) = \mathbf{X}(\phi)\psi + \phi\mathbf{X}(\psi). \tag{۱۴۶}$$

[۲۹] erivationD

دقت کنید که در طرف راست ϕ یک تابع و $\mathbf{X}(\psi)$ هر دو تابع هستند بنابراین ضرب آنها نیز یک تابع است.

پس از تعریف فضای مماس مورچه ریاضیدان ما به این فکر می افتد که این فضایی که تعریف کرده حتما یک دوگانی دارد که آن هم یک فضای برداری است. این فضا را با T_p^*M نشان می دهد. اما در اینجا باید کمی صبر کنیم و مفهوم فضای دوگان را یادآوری کنیم.

- **تعریف فضای دوگان :** فرض کنید که V یک فضای بردار حقیقی باشد. یک تابعی [۳۰] $\omega : V \longrightarrow R$ یک تابعی خطی [۳۱] خوانده می شود هرگاه دارای خاصیت زیر باشد:

$$\omega(cu+v) = c\omega(u) + \omega(v), \qquad c \in R, \qquad u, v \in V. \tag{۱۴۷}$$

به عنوان مثال $\omega(v) = v^i$ که در آن v^i یکی از مولفه های بردار v است یک تابعی خطی است. یا مثلا اگر فضا دارای یک ضرب داخلی باشد $\omega(v) = v_0 \cdot v$ که در آن v_0 یک بردار ثابت است، یک تابعی خطی است. در عوض $\omega(v) = \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}$ یک تابعی خطی نیست.

- **تمرین:** نشان دهید که مجموعه تمامی تابعی های خطی روی یک فضای برداری خود یک فضای برداری است. این فضای برداری را با V^* نشان می دهیم و آن را دوگان فضای V می خوانیم.

هرگاه فضای

$$\{e_1, e_2, \cdots e_n\}$$

یک پایه برای فضای V باشد، می توانیم یک پایه برای فضای V^* به صورت زیر تعریف کنیم:

$$e^i : V \longrightarrow R, \qquad e^i(\mathbf{v}) = \mathbf{v^i}. \tag{۱۴۸}$$

واضح است که e^i یک تابعی خطی است زیرا

$$e^i(c\mathbf{u}+\mathbf{v}) = cu^i + v^i = ce^i(\mathbf{u}) + e^i(\mathbf{v}).$$

- **تمرین:** نشان دهید که تابعی های e^i یک پایه برای فضای V^* تشکیل می دهند. بنابراین فضای V^* با فضای V بعد یکسان دارد.

[۳۰] Functional

[۳۱] Linear Functional

از تعریف (۱۴۸) می فهمیم که

$$e^i(e_j) = \delta^i_j.$$

حال که تعریف فضای دوگان را به صورت کلی فهمیدیم می توانیم فضای دوگان T_pM را تعریف کنیم. این فضای دوگان را با T_p^*M نشان می دهیم. برای بردارهای پایه این فضا نیز نمادهای زیر را به کار می بریم

$$\{du^1, du^2\}$$

که در رابطه زیر صدق می کنند:

$$du^i(\partial_j) = \delta^i_j. \tag{۱۴۹}$$

عناصر فضای T_p^*M را هم بردار [۳۲] یا یک- فرم [۳۳] می نامیم و نمادهای $\alpha, \beta, ...$ را برای آنها به کار می بریم. بنابراین می نویسیم

$$\alpha = \alpha_i du^i, \tag{۱۵۰}$$

کمی بعد خواهیم فهمید که چرا این نماد را برای بردارهای پایه فضای دوگان بکار می بریم. خواهیم دید که این نماد بی اندازه مناسب است. با توجه به رابطه ی (۱۴۹) می توانیم بفهمیم که تحت تغییر مختصات، این بردارهای پایه به صورت زیر تغییر می کنند:

$$du^{i'} = \frac{\partial u^{i'}}{\partial u^i} du^i \tag{۱۵۱}$$

و در نتیجه مولفه های فرم ها به صورت زیر تغییر می کنند:

$$\alpha_{i'} = \frac{\partial u^i}{\partial u^{i'}} \alpha_i. \tag{۱۵۲}$$

حال می خواهیم بفهمیم که چرا برای بردارهای پایه فضای دوگان نماد du^i را به کار می بریم. در ادامه تعاریفِ مجرد خود، مورچه می تواند تابعی های خاصی به شکل زیر تعریف کند: به ازای یک تابع مثل $\phi \in C^1(M)$ یک تابعی به شکل زیر تعریف می کند:

$$d\phi : T_pM \longrightarrow R, \qquad d\phi(\mathbf{X}_p) := \mathbf{X}_p(\phi). \tag{۱۵۳}$$

دقت کنید که $d\phi$ فعلا یک نماد است و معنای مشتق ندارد. این نماد تنها نشان دهنده یک تابعی است که کارش این است که یک بردار مثل $X_p \in T_pM$ را به یک عدد می نگارد. حال می توانیم بفهمیم که مورچه ریاضیدان ما در این تعریف و هم چنین در این نمادگذاری تا چه حد هوشمندی به خرج داده است:

---

[۳۲] covector

[۳۳] form

■ **تمرین حل شده:** الف: شان دهید که $d\phi$ واقعا یک تابعی خطی است.

حل: α را یک عدد حقیقی و X_p و Y_p را دو بردار متعلق به T_pM می گیریم. با استفاده از تعریف (۱۵۳) داریم:

$$d(\phi)(\alpha X_p + Y_p) = (\alpha X_p + Y_p)(\phi) = (\alpha X_p)(\phi) + Y_p(\phi) = \alpha X_p(\phi) + Y_p(\phi) = \alpha d\phi(X_p) + d\phi(Y_p). \quad (۱۵۴)$$

که نشان می دهد $d\phi$ واقعا یک تابعی خطی است.

ب) نشان دهید که

$$d(\phi + \psi) = d\phi + d\psi,$$

که معنایش این است که می توانیم عملگری خطی به نام d تعریف کنیم که از یک تابع مثل ϕ یک تابعی $d\phi \in T_p^*M$ درست می کند.

حل: باز هم $\alpha \in R$ را یک عدد می گیریم. با استفاده از تعریف (۱۵۳) داریم:

$$d(\alpha\phi + \psi)(X_p) = X_p(\alpha\phi + \psi) = \alpha X_p(\phi) + X_p(\psi) = \alpha d\phi(X_p) + d\psi(X_p) \quad (۱۵۵)$$

از آنجا که این رابطه برای هر بردارِ X_p برقرار است، می توانیم آن را به صورت زیر بنویسیم که خطی بودن عملگر d را نشان می دهد:

$$d(\alpha\phi + \psi) = \alpha\phi + d\psi. \quad (۱۵۶)$$

پ: با استفاده از تعریف فوق نشان دهید که

$$d(\phi\psi) = \phi(p)d\psi + \psi(p)d\phi.$$

بنابراین نماد $d\phi$ برای این تابعی کاملا مناسب بوده است.

حل: با دو بار استفاده از تعریف (۱۵۳) و با استفاده از خاصیت لایب نیتزی X_p می دانیم که:

$$d(\phi\psi)(X_p) = X_p(\phi\psi) = X_p(\phi)\psi(p) + \phi(p)X_p(\psi) = d\phi(X_p)\psi(p) + \phi(p)d\psi(X_p) \quad (۱۵۷)$$

و در نتیجه

$$d(\phi\psi)(X_p) = \big[\psi(p)d\phi + \phi(p)d\psi\big](X_p). \quad (۱۵۸)$$

از آنجا که این اتحاد برای هر بردارِ X_p درست است، بدست می آوریم:

$$d(\phi\psi) = \psi(p)d\phi + \phi(p)d\psi. \quad (۱۵۹)$$

پس از همه اینها و با استفاده از تعریف تابعی می بینیم که

$$du^i(\partial_j) = \partial_j(u^i) = \delta^i_j,$$

که به خوبی نشان می دهد du^i ها دوگان ∂_i ها هستند. حال خواننده می تواند نشان دهد که $\{du^i\}$ ها واقعا یک پایه برای T^*_pM تشکیل می دهند و هر تابعی مثل $\omega \in T^*_pM$ را می توان به صورت زیر نوشت:

$$\omega = \omega_i du^i. \tag{۱۶۰}$$

که در آن $\omega_i = \omega(\partial_i)$. با تعریف بردارها و فرم ها می توانیم براحتی تانسورهای با رتبه دلخواه را تعریف کنیم. روابط زیر چند تانسور و بسط آنها را بر حسب مولفه هایشان نشان می دهد:

$$\begin{aligned} T &= T^{ij}\partial_i \otimes \partial_j \in T_pM \otimes T_pM, \\ \omega &= \omega^{ij} du^i \otimes du^j \in T^*_pM \otimes T^*_pM, \\ A &= A^{ij}{}_k \partial_i \otimes \partial_j \otimes du^k \in T_pM \otimes T_pM \otimes T^*_pM. \end{aligned} \tag{۱۶۱}$$

گسترش این تانسورها به تمامی خمینه میدان های تانسوری با رتبه های مربوطه را تعریف می کند.

۲.۱۰ مشتق هموردای میدان های برداری

حال که مورچه هوشمند روی سطح تانسورها و میدان های تانسوری را با موفقیت تعریف کرده است به سراغ مشتق هموردا می رود. $X_p \in T_pM$ را یک بردار در فضای مماس بر نقطه p و $Y \in \mathcal{H}(M)$ را یک میدان برداری روی خمینه M می گیریم. فضای توابع حقیقی و مشتق پذیری روی خمینه ی M را با $C^1(M)$ نشان می دهیم. مشتق هموردا در جهت $X_p \in T_pM$ از میدان های برداری $Y \in \mathcal{H}(M)$ را با ∇_{X_p} نشان می دهیم. این عملگر به صورت عملگری تعریف $\nabla_{\mathbf{X}_p} : \mathcal{H}(M) \longrightarrow T_pM,$ می شود که خصوصیات زیر را داشته باشد. این خصوصیات چیزی جز تقاضای خطی بودن این عملگر و خاصیت مشتق گونه آن نیست.

$$\begin{aligned} &\nabla_{\mathbf{X}_p}(\mathbf{Y}+\mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{X}_p}(\mathbf{Y}) + \nabla_{\mathbf{X}_p}(\mathbf{Z}), \\ &\nabla_{\mathbf{X}_p}(f) = \mathbf{X}_p(f), \qquad f \in C^1(M). \end{aligned} \tag{۱۶۲}$$

رابطه اول بیان می کند که مشتق هموردا اولا می بایست به صورت خطی عمل کند که خاصیتی است که از هر مشتقی انتظار داریم. رابطه دوم نیز بیان می کند که اثر مشتق هموردای ∇_{X_p} روی توابع همان مشتق معمولی از توابع در امتداد X_p است که قبلا آن را مطالعه کرده ایم. مشتق

هموردا دو خاصیت طبیعی دیگر هم دارد که بیانگر خطی بودن عمل مشتق نسبت به برداری است که در امتداد آن مشتق می گیریم. این دو خاصیت به ترتیب زیر بیان می شوند:

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}_p+\mathbf{Y}_p} &= \nabla_{\mathbf{X}_p} + \nabla_{\mathbf{Y}_p} \\ \nabla_{\alpha\mathbf{X}_p} &= \alpha\nabla_{\mathbf{X}_p} \qquad \alpha \in R. \end{aligned} \tag{۱۶۳}$$

آنچه که این روابط بیان می کنند، تعریف مشتق همورداي یک میدان برداری در همسایگی است که نقطه p و بردار $\mathbf{X}_p$ در آن قرار دارد. اگر این کار را در هر نقطه ای انجام دهیم، آنگاه به جای $\mathbf{X}_p$ میدان برداری $\mathbf{X}$ در روابط بالا قرار خواهد گرفت و به تناسب آن نیز بعضی چیز ها عوض خواهند شد. مهم ترین تغییر این است که حالا مشتق هموردا که آن را با $\nabla_{\mathbf{X}}$ نشان می دهیم، یک میدان برداری را به یک میدان برداری دیگر می نگارد: یعنی

$$\nabla_{\mathbf{X}} : \mathcal{H}(M) \longrightarrow \mathcal{H}(M). \tag{۱۶۴}$$

به تناسب این تغییر بعضی تغییرات نیز در روابط پیش گفته ایجاد خواهد شد:

$$\begin{aligned} &\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}+\mathbf{Z}) = \nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}) + \nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{Z}), \\ &\nabla_{\mathbf{X}}(f) = \mathbf{X}(f), \qquad f \in C^1(M). \end{aligned} \tag{۱۶۵}$$

$$\begin{aligned} \nabla_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}} &= \nabla_{\mathbf{X}} + \nabla_{\mathbf{Y}} \\ \nabla_{f\mathbf{X}} &= f\nabla_{\mathbf{X}} \qquad f \in C^1(M). \end{aligned} \tag{۱۶۶}$$

از این پس ما نیز به این حالت کلی توجه می کنیم که در آن مشتق یک میدان برداری نسبت به یک میدان برداری دیگر محاسبه می شود. طبیعی است که همواره می توانیم عمل مشتق گیری را در یک نقطه و یک همسایگی انجام دهیم. حال از خصوصیات کلی که برای مشتق هموردا انتظار داریم استفاده می کنیم و مشتق هموردا را بر حسب مولفه ها می نویسیم. در هر یک از تساوی های زیر از یکی از اصول و ویژگی های پیش گفته استفاده شده است.

$$\nabla_{\mathbf{X}}(\mathbf{Y}) = \nabla_{X^i\partial_i}(Y^j\partial_j) = X^i\nabla_{\partial_i}(Y^j\partial_j) = X^i\Big[\nabla_{\partial_i}(Y^j)\partial_j + Y^j\nabla_{\partial_i}\partial_j\Big] \tag{۱۶۷}$$

از آنجا که بنابر تعریف و خواص مشتق هموردا که در بالا گفتیم، مشتق هموردای بردارهای پایه نیز بسطی بر حسب همان بردارهای پایه دارد می دانیم که

$$\nabla_{\partial_i}\partial_j = \Gamma^k{}_{ij}\partial_k. \tag{۱۶۸}$$

با ترکیب این رابطه با رابطه قبلی به همان عبارت (۳۷) برای مشتق هموردا می رسیم.